CUBO 10, 15-21 (1994)
Octava Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Soluciones Analíticas de un Problema de Valor Inicial y de Contorno.*

Eric Paredes U.

Resumen

En este trabajo se considera un Problema de Valor Inicial y de Contorno (P.V.I.C.), en el cual la ecuación diferencial parcial es de segundo orden, lineal y de tipo hiperbólico. El P.V.I.C. corresponde a una generalización de problemas ya tratados en forma parcial en Spiegel [9] y en Myint [6].

El objetivo del autor es estudiar el P.V.I.C., determinando soluciones analíticas. En particular, se obtienen condiciones suficientes para obtener dichas soluciones.

1 Introducción

Consideremos el Problema de Valor Inicial y de Contorno siguiente:

$$(P): \begin{cases} u_{xy} = K(x)u_x + L(x), x > 0, y > 0 & \\ u(0,y) = F(y) & (P1) \\ u_x(x,0) = G(x) & (P2) \end{cases}$$

donde K, L, F y G son funciones conocidas. Supongamos que el problema (P) admite una solución u(x,y) tal que $u_{xy} = u_{yx}$. Determinaremos a continuación dicha solución.

*Proyecto F4-02MF-94, Universidad de Magallanes

Sean $p = u_x$ y $p_x = u_{xy}$. Entonces, la EDP del problema (P) se puede escribir en la forma:

$$p_y - K(x)p = L(x)$$

la cual es una EDOL, cuya solución es:

$$p(x,y) = u_x(x,y) = e^{K(x)y} \int L(X)e^{-K(x)y}dy + e^{K(x)y}C(x), \tag{1}$$

donde $C(x)$ es arbitraria.

Al integrar (1) con respecto a x, se obtiene:

$$u(x,y) = \int e^{K(x)y}[\int L(x)e^{-K(x)y}dy]dx + \int C(x)e^{K(x)y}dx + A(y), \tag{2}$$

donde A(y) es arbitraria.

El problema se reduce ahora a determinar las funciones $C(x)$ y $A(y)$ de manera explícita.

Sean:

$$B_1 := \int L(x)e^{-K(x)y}dy \tag{3}$$

$$B_2 := \int e^{k(x)y}C(x)dx, \tag{4}$$

entonces, (2) se puede escribir en la forma:

$$u(x,y) = \int e^{K(x)y}B_1(x,y)dx + B_2(x,y) + A(y) \tag{5}$$

Derivando (5) con respecto a x se tiene:

$$u_x(x,y) = e^{K(x)y}B_1(x,y) + (B_2)_x(x,y) = e^{K(x)y}B_1(x,y) + e^{K(x)y}C(x)$$

En la última igauldad se utilizó (4). Aplicando (P2), se obtiene:

$$C(x) = G(x) - B_1(x,0) \tag{6}$$

Al reemplazar (4) y (6) en (5):

$$u(x,y) = \int e^{K(x)y}[B_1(x,y) - B_1(x,0)]dx + \int e^{K(x)y}G(x)dx + A(y), \tag{7}$$

Definamos ahora

$$B_3(x,y) := \int e^{K(x)y} G(x)dx \tag{8}$$

$$B_4(x,y) := \int e^{K(x)y} [B_1(x,y) - B_1(x,0)]dx, \tag{9}$$

entonces, (7) se puede escribir de la forma:

$$u(x,y) = B_4(x,y) + B_3(x,y) + A(y). \tag{10}$$

Aplicando (P1), obtenemos:

$$A(y) = F(y) - B_4(0,y) - B_3(0,y) \tag{11}$$

Luego, utilizando (10) y (11) se tiene:

$$u(x,y) = [B_4(x,y) - B_4(0,y)] + [B_3(x,y) - B_3(0,y)] + F(y),$$

utilizando (8) y (9) se obtiene:

$$= \int_0^x e^{K(t)y}[B_1(t,y) - B_1(t,0)]dt + \int_0^x e^{K(t)y} G(t)dt + F(y),$$

utilizando (3) se obtiene:

$$= \int_0^x e^{K(t)y}\{\int_0^y L(t)e^{-K(t)z}dz\}dt + \int_0^x e^{K(t)y} G(t)dt + F(y).$$

Así hemos obtenido como solución del problema (P) la función:

$$u(x,y) = \int_0^x e^{K(t)y}\{\int_0^y L(t)e^{-K(t)z}dz\}dt + \int_0^x e^{K(t)y} G(t)dt + F(y), \tag{12}$$

Podemos observar que:

Para que (12) sea una solución del problema (P) deben satisfacerse algunas condiciones de integrabilidad en las funciones K, L y G, por ejemplo: K, L y G continuas.

Proposición 1.1 *La solución del problema (P) es única.*

Demostración

Sean u_1 y u_2 soluciones de (P) tales que $u_1 \neq u_2$ y consideremos la función:

$$v(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$$

Entonces:

$$(Q) : \begin{cases} v_{xy} - K(x)v_x & = 0 \quad (13) \\ v(0,y) & = 0 \quad (Q1) \\ v_x(x,0) & = 0 \quad (Q2) \end{cases}$$

Sean $q = v_x$ y $q_y = v_{xy}$. Entonces (13) se puede escribir en la forma:

$$q_y - K(x)q = 0$$

que es una EDOL, cuya solución es:

$$q(x,y) = v_x(x,y) = C(x)e^{K(x)y}, \tag{14}$$

donde C(x) es arbitraria.

Al integrar (14) con respecto a x:

$$v(x,y) = \int C(x)e^{K(x)y}dx + A(y), \tag{15}$$

donde A(y) es arbitraria.

Aplicando(Q1) y (Q2) a (14) y (15), obtenemos: C(x) = A(y) = 0.
Luego v(x,y)= 0 es solución del problema (Q) y en consecuencia:

$$u_1(x,y) = u_2(x,y)$$

De manera que la solución del problema (P) es única. ■

Proposición 1.2 *Sean $u_i(x,y)$ solución del problema de valor inicial y de contorno:*

$$(P): \begin{cases} u_{xy} &= K(x)u_x + L_i(x) \\ u(0,y) &= F_i(y) \\ u_x(x,0) &= G_i(x) \end{cases} \quad donde\ i = 1,2,3,\cdots,n$$

Entonces:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,y),$$

es solución del problema de valor inicial y de contorno:

$$(P*): \begin{cases} u_{xy} &= K(x)u_x + \sum_{i=1}^{n} L_i(x) \\ u(0,y) &= \sum_{i=1}^{n} F_i(y) \\ u_x(x,0) &= \sum_{i=1}^{n} G_i(x) \end{cases}$$

Demostración

El resultado es consecuencia directa de la linealidad de los operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[u] &= u_{xy} - K(x)u_x \\ \mathcal{P}_1[u] &= u(0,y) \\ \mathcal{P}_2[u] &= u_x(x,0) \end{aligned}$$

En efecto:

$$\mathcal{P}[\sum_{i=1}^{n} u_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}[u_i] = \sum_{i=1}^{n} [(u_i)_{xy} - K(x)(u_i)_x] = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)$$

$$\mathcal{P}_1[\sum_{i=1}^{n} u_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_1[u_i] = \sum_{i=1}^{n} u_i(0,y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(y)$$

$$\mathcal{P}_2[\sum_{i=1}^{n} u_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_2[u_i] = \sum_{i=1}^{n} (u_i)_x(x,0) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x)$$

Por lo tanto, si $u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,y)$:

$$\mathcal{P}[u] = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)$$
$$\mathcal{P}_1[u] = \sum_{i=1}^{n} F_i(y)$$
$$\mathcal{P}_2[u] = \sum_{i=1}^{n} G_i(x)$$

y así $u(x, y)$ es solución de (P*). ∎

Ahora que hemos obtenido una solución general del problema (P) y además hemos demostrado su unicidad, podemos estudiar algunos casos particulares.

Por ejemplo, si $K(x) = K_0$, donde $K_0 \in \mathbb{R}$, el problema de valor inicial y de contorno:

$$(Q): \begin{cases} u_{xy} &= K_0 u_x + L(x) \\ u(0, y) &= F(y) \\ u_x(x, 0) &= G(x) \end{cases}$$

tiene solución dada por:

$$u(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{e^{K_0 y}-1}{K_0}\right) \int_0^x L(t)dt + e^{K_0 y} \int_0^x G(t)dt + F(y) & , \text{si} \quad K_0 \neq 0, \\ y \int_0^x L(t)dt + \int_0^x G8t) + F(y) & , \text{si} \quad K_0 = 0 \end{cases} \tag{16}$$

De la expresión (16), podemos obtener condiciones suficientes para que la solución de (Q) se pueda obtener de manera exacta. En efecto si las integrales indefinidas: $\int L(t)dt$ y $\int G(t)dt$, son elementales (en el sentido de Abellanas y Galindo [1]), entonces la solución dada en (16) se puede calcular de manera exacta.

En base al, resultado anterior, es posible obtener una familia infinita no numerable de soluciones exactas de (Q), eligiendo adecuadamente las funciones L y G para F y K_0 arbitrarios.

Referencias

[1] Galindo A. *Métodos de Cálculo*. Mc. Graw-Hill (1990).

[2] Duchateau P., Zachmann D.W. *Ecuaciones Diferenciales Parciales*. Mc Graw-Hill (1988).

[3] Edwards P. *Ecuaciones Diferenciales Elementales con Aplicaciones*. Ed. Prentice Hall (1985).

[4] Farlow S.J. *Partial Differential Equationes for Scientist and Engineers*. Ed. John Wiley-Sons (1982).

[5] Jiménez F. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Universidad de Concepción.

[6] Lieberstein H.M. *Theory of Partial Differential Equations*. Ed. Academic Press (1972).

[7] Myint-V Tyn, Lokenath D. *Partial Differential Equations for Scientist and Engineers*. Ed North-Holland *(1987)*.

[8] Petrovski I.G. *Lecciones sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Ciencia Técnica (1969).

[9] Sneddon I. *Elements of Partial Differential Equations*. Ed. Mc Graw-Hill *(1957)*.

[10] Spiegel Murray R. *Applied Differentail Equations*. E.P.U:H. (1962).

[11] Tijonov A., Samarsky A. *Ecuaciones de la Física Matemática*. Ed. Mir. Moscú

[12] Weinberger H.E. *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*. Ed. Reverté, S. A.

[13] Williams W.E. *Partial Differential Equations* . Clarendore Press-Oxford (1980).

Dirección del autor:

Departamento de Matemática y Física
Universidad de Magallanes
Casilla 113-D. Punta Arenas