CUBO 11, 29-36 (1995)
Novena Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Cálculo subdiferencial y conjuntos polares.

Manuel Bustos V.

Abstract.
In this note we set a link between ε-subdifferential calculus and and polar sets. This allows us to obtain calculus rules on polar sets in a nice way and it brings us to believe that this point of view could give rise to new results. In fact by this bias we obtain an improvement of a result given in literature. .

1 Introdución.

En este trabajo presentamos una aplicación del cálculo subdiferencial al cálculo de conjuntos polares. Más precisamente el conjunto polar C° es expresado como un ε-subdiferencial de la función indicatriz de C. Se sigue entonces que las reglas del cálculo ε-subdiferencial pueden ser utilizadas para derivar las reglas correspondientes al cálculo de conjuntos polares.

Los conjuntos polares juegan un rol importante en análisis convexo y este nuevo enfoque podría permitirnos obtener más información sobre ellos. Esta suposición no es infundada ya que por este método obtenemos un resultado (Proposición 4) que mejora una estimación dada en la literatura ([5], Teorema 14.7).

El contexto general en lo que sigue es el de dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (*e.v.t.l.c.*) E y F, en dualidad separante por una forma bilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$. El ejemplo clásico es el de un *e.v.t.l.c.* E y su dual topológico E^{*}.

Como es usual en análisis convexo, $\bar{\mathbb{R}}$ denota el conjunto $[-\infty, +\infty]$. Si $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$, la *conjugada* de f (o *transformada de Legendre-Fenchel* de f), es la función $f^* : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in E}\{\langle x, x^*\rangle - f(x)\}.$$

Si A es un subconjunto no vacío de E, su *función indicatriz* $\psi_A : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ se define como:

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función conjugada de ψ,

$$\psi_A^*(x^*) = \sup\{\langle x, x^*\rangle \mid x \in A\},$$

es la *función soporte* del conjunto A. ψ_A^* es una función convexa, positivamente homogénea y semicontinua inferior.

Si $f, g \in \Gamma_0(E)$ - conjunto de todas las funciones convexas, propias y semicontinuas inferior -, la *inf-convolución* de f y g es la función convexa definida en E por:

$$(f \bigtriangledown g)(x) = \inf\{f(x_1) + g(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\}.$$

La inf-convolución de f y g es *exacta* en $\bar{x} \in E$ si existen $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in E$, $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ y $(f \bigtriangledown g)(\bar{x}) = f(\bar{x}_1) + g(\bar{x}_2)$.

Dados $f \in \Gamma_0(E)$, $x_0 \in E$ y $\varepsilon \geq 0$, el *ε-subdiferencial* de f en x_0 es el conjunto convexo $\partial_\varepsilon f(x_0) \subset F$ definido por:

$$x^* \in \partial_\varepsilon f(x_0) \Longleftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \langle x - x_0, x^*\rangle - \varepsilon, \ \forall x \in E$$

o, equivalentemente:

$$x^* \in \partial_\varepsilon f(x_0) \Longleftrightarrow f(x_0) + f^*(x^*) - \langle x_0, x^*\rangle \leq \varepsilon.$$

De las definiciones precedentes se sigue que si $C \subset E$ es convexo, cerrado y no vacío, entonces $\psi_C \in \Gamma_0(E)$ y para todo $x_0 \in C$:

$$\begin{aligned} x^* \in \partial_\varepsilon \psi_C(x_0) &\Longleftrightarrow \langle x - x_0, x^*\rangle \leq \varepsilon, \ \forall x \in C \\ &\Longleftrightarrow \psi_C^*(x^*) - \langle x_0, x^*\rangle \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La relación entre el cálculo ε-subdiferencialy el cálculo de conjuntos polares se establecerá mediante la noción de *conjunto normal aproximado*: dados $C \subset E$ convexo cerrado y no vacío, $x_0 \in E$ y $\varepsilon \geq 0$, el *conjunto de direcciones ε-normales* a C en x_0 es

$$N_\varepsilon(C;x_0) = \{x^* \in F \mid \langle x - x_0, x^* \rangle \leq \varepsilon, \ \forall x \in C\}.$$

Para $\varepsilon = 0$ se obtiene el *cono normal* a C en x_0, $N(C;x_0)$.
En lo que sigue usaremos las notaciones $\operatorname{int} A$, $\bar{A}$, $\operatorname{conv} A$ y $\overline{\operatorname{conv}} A$, para el *interior*, la *clausura*, la *envoltura convexa* y la *envoltura convexa cerrada* de un conjunto $A \subset E$, respectivamente.
Recordemos que si $C \subset E$, el *conjunto polar* de C es

$$A^\circ = \{x^* \in F \mid \langle x, x^* \rangle \leq 1, \ \forall x \in A\}.$$

Se verifica fácilmente que si $A \subset E$, entonces para todo conjunto B, $A \subset B \subset \overline{\operatorname{conv}}(A \bigcup \{0\})$ se tiene la igualdad $B^\circ = A^\circ$, de modo que la hipótesis siguiente: "*$C \subset E$ es un conjunto convexo cerrado que contiene a 0*" no es restrictiva.
Así, si $C \subset E$ es un conjunto convexo cerrado que contiene 0, de lo precedente se obtiene:

$$C^\circ = N_1(C;0) = \partial_1 \psi_C(0),$$

relación fundamental en lo que sigue.
Finalmente, y por razones de notación, introducimos el *n-simplex* en $\mathbb{R}^n$: $\sum_n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i = 1, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0\}$.

2 Reglas de cálculo para conjuntos polares

Nuestro interés es dar algunos ejemplos que ilustren como se aplican las reglas del cálculo ε-subdiferencial al cálculo de conjuntos polares. Las referencias utilizadas en esta sección son ([2] y [5]), para las reglas clásicas del cálculo de conjuntos polares. Las reglas de cálculo para el ε-subdiferencial pueden encontrarse en ([1]).
La hipótesis que se enuncia a continuación no es restrictiva en modo alguno, como lo hemos señalado en la introducción:
$(\mathcal{H})$ $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *son subconjuntos convexos cerrados de E que contienen a 0.*
El lema que sigue se demuestra directamente.

Lema 2.1 *Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene*

$$\partial_\varepsilon \psi_C(0) = \varepsilon C^\circ ,$$

y si $\varepsilon = 0$ entonces

$$\partial_0 \psi_C(0) = N(C;0) .$$

Recordemos también que $N(C;0)$ es igual a 0^+C°, el *cono asintótico* de C° (véase [5], Teorema 14.6). Se sigue entonces que $\partial_0\psi_C(0) \subset \alpha C^\circ$ para todo $\alpha > 0$.
Nuestra primera aplicación corresponde al cálculo del conjunto polar de la suma de un número finito de subconjuntos de E.

Proposición 2.2 *Si $C_1, C_2, \ldots, C_n$, satisfacen la hipótesis $(\mathcal{H})$, entonces*

$$\left(\sum_{1\le i\le n} C_i\right)^\circ = \bigcup_{a\in\sum_n} \bigcap_{1\le i\le n} a_i C_i^\circ .$$

Demostración: Daremos la demostración para $n = 2$; el resultado general se sigue por inducción en n.
Un cálculo simple muestra que: $\psi_{C_1+C_2} = \psi_{C_1} \nabla \psi_{C_2}$, la inf-convolución de ψ_{C_1} y ψ_{C_2}.
También $0 = 0 + 0 \in C_1 \bigcap C_2$, de modo que $\psi_{C_1} \nabla \psi_{C_2}$ es exacta en 0.
Lo anterior sugiere aplicar la regla de cálculo para el ε-subdiferencial de la inf-convolución de dos funciones convexas propias ([1], Teorema 3.1):

$$\begin{aligned}(C_1 + C_2)^\circ &= \partial_1(\psi_{C_1} \nabla \psi_{C_2})(0) = \bigcup_{(a_1,a_2)\in\sum_2} [\partial_{a_1}\psi_{C_1}(0) \bigcap \partial_{a_2}\psi_{C_2}(0)] \\ &= \bigcup_{(a_1,a_2)\in\sum_2} [a_1 C_1^\circ \bigcap a_2 C_2^\circ]\end{aligned}$$

■

Damos a continuación una aplicación al cálculo del conjunto polar de la intersección de un número finito de subconjuntos de E.

Proposición 2.3 *Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$, verifican la hipótesis $(\mathcal{H})$ y que, en adición,*

$$0 \in int\Big(\bigcap_{1\le i\le n-1} C_i\Big)\bigcap C_n.$$

Entonces

$$\Big(\bigcap_{1\le i\le n} C_i\Big)^\circ = conv\Big(\bigcup_{1\le i\le n} C_i^\circ\Big)$$

Demostración: Como en el caso precedente se dará la demostración para $n = 2$.

Se tiene: $\psi_{C_1\bigcap C_2} = \psi_{C_1} + \psi_{C_2}$, relación que sugiere la aplicación de la regla de cálculo del ε-subdiferencial de la suma de dos funciones ([1], Teorema 2.1).

Como ψ_{C_1} y ψ_{C_2} son funciones convexas propias y ψ_{C_1} es continua a lo menos en algún $\bar{x} \in \text{int}(C_1)\bigcap C_2$, se sigue:

$$(C_1\bigcap C_2)^\circ = \partial_1(\psi_{C_1} + \psi_{C_2})(0) = \bigcup_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\sum_1} [\partial_{\varepsilon_1}\psi_{C_1}(0) + \partial_{\varepsilon_2}\psi_{C_2}(0)] .$$

Además

$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon_i}\psi_{C_i}(0) &= \varepsilon_i C_i^\circ, \quad \text{si } \varepsilon_i > 0 \\ &= 0^+C_i, \quad \text{si } \varepsilon_i = 0 \text{ (véase Lema 2.1)} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (C_1\bigcap C_2)^\circ &= \bigcup_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\sum_1} (\varepsilon_1 C_1^\circ + \varepsilon_2 C_2^\circ) \\ &= \text{conv}(C_1^\circ \bigcup C_2^\circ) . \end{aligned}$$

■

Para la próxima aplicación consideramos dos pares de *e.v.t.l.c.* en dualidad (E_1, F_1), (E_2, F_2). Sean $A : E_1 \longrightarrow E_2$ un *operador lineal continuo* y $A^* : F_2 \longrightarrow F_1$ su *operador adjunto*. Si $C \subset E_2$ es un conjunto convexo cerrado que contiene a 0, sea $h = \psi_C \circ A$. Supongamos que h satisface la hipótesis siguiente:

$$\forall x^* \in F_1, \;\; h^*(x^*) = \inf\{\psi_C^*(y^*) \mid A^*y^* = x^*\} .$$

lo cual ocurre si, por ejemplo, existe $\bar{x} \in E_1$ tal que $A\bar{x} \in \text{int}\, C$.

Proposición 2.4 *En las hipótesis precedentes se tiene:*

$$[A^{-1}(C)]^\circ = A^*(C^\circ) .$$

Demostración: Puesto que $\psi_{A^{-1}(C)} = \psi_C \circ A$ se sigue

$$\begin{aligned}[A^{-1}(C)]^{\circ} &= \partial_1(\psi_C \circ A)(0) = A^{*}\partial_1\psi_C(A(0)) \quad \text{([1],Teorema 2)} \\ &= A^{*}(C^{\circ})\end{aligned}$$

■

Con el fin de realizar una última aplicación necesitamos modificar las hipótesis de la Proposición 3. En lugar de un operador lineal $A : E_1 \longrightarrow E_2$ consideramos ahora una función convexa y propia $f : E \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, el conjunto convexo cerrado $C =]-\infty, \alpha]$, $\alpha \in \mathbf{R}$ y su imagen inversa $f^{-1}(C)$.

Proposición 2.5 *Sea $f \in \Gamma_0(E)$ una función tal que $0 \in \operatorname{dom} f$. Si $\alpha > f(0)$, sea $D = \{x \in E \mid f(x) \leq \alpha\}$. Entonces $x^{*} \in D^{\circ}$ si y sólo si existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \sum_2$, $t \in \mathbf{R}_+$ tal que:*

$$t \in [0, \varepsilon_1/(\alpha - f(0))] \quad \textit{and} \quad (tf)^{*}(x^{*}) \leq \varepsilon_2 - tf(0)\ .$$

Además, si f es una función positiva y $f(0) = 0$, se tiene la estimación siguiente:

$$D^{\circ} \subset \alpha^{-1}\{x^{*} \in E^{*} \mid f^{*}(x^{*}) \leq \alpha\} \subset 2D^{\circ}$$

Demostración: Si $C =]-\infty, \alpha]$ entonces: $\psi_D = \psi_{f^{-1}(C)} = \psi_C \circ f$.
Además $\psi_C \in \Gamma_0(\bar{\mathbf{R}})$ es una función creciente y $f(0) \in f(\operatorname{dom} f) \bigcap]-\infty, \alpha[$, luego de ([1], Teorema 5.1) se sigue: $x^{*} \in \partial_1(\psi_C \circ f)(0)$ si y sólo si existen números reales positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, t$, tales que:

(1) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$,

(2) $t \in \partial_{\varepsilon_1}\psi_C(f(0))$ y $x^{*} \in \partial_{\varepsilon_2}(tf)(0)$.

Un cálculo directo da:

$$\partial_{\varepsilon_1}\psi_C(f(0)) = [0, \varepsilon_1/(\alpha - f(0))]\ .$$

Por otra parte, $x^{*} \in \partial_{\varepsilon_2}(tf)(0)$ si y sólo si

$$(tf)(0) + (tf)^{*}(x^{*}) - \langle 0, x^{*}\rangle \leq \varepsilon_2\ .$$

es decir:

$$tf(0) + (tf)^{*}(x^{*}) \leq \varepsilon_2\ .$$

Con el fin de obtener la estimación de D° observemos que el ε-subdiferencial es una multifunción creciente del parámetro (positivo) ε. Lo anterior unido a las hipótesis sobre f nos da:

$$0 \leq \lambda \leq \mu \Longrightarrow \partial_\varepsilon(\lambda f)(0) \subset \partial_\varepsilon(\mu f)(0) .$$

De aquí se deduce: $\quad \partial_{\varepsilon_1}(tf)(0) \subset \partial_1(\alpha^{-1}f)(0)$,

de modo que: $\quad x^* \in \partial_{\varepsilon_1}(tf)(0) \Longrightarrow (\alpha^{-1}f)^*(x^*) \leq 1 \Longleftrightarrow f^*(\alpha x^*) \leq \alpha$,

y de aquí deducimos la primera estimación: $\quad D^\circ \subset \alpha^{-1}\{z^* \in E^* \mid f^*(z^*) \leq \alpha\}$.

Finalmente, de la desigualdad:

$$\psi_D^*(x^*) = \sup\{(\langle x, x^*\rangle - \alpha) + \alpha \mid x \in D\} \leq f^*(x^*) + \alpha ,$$

deducimos:

$$\begin{aligned} \{x^* \in E^* \mid f^*(x^*) \leq \alpha\} \subset & \ \{x^* \in E^* \mid \psi_D^*(x^*) \leq 2\alpha\} \\ = & \ 2\alpha\{x^* \in E^* \mid \psi_D^*(x^*) \leq 1\} \\ = & \ 2\alpha D^\circ , \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.

■

Este resultado, anunciado en la introducción de este trabajo, ha sido obtenido mediante el cálculo ε-subdiferencial. Es una caracterización completa del conjunto polar $f^{-1}(C)$ en términos de la función conjugada de f y pemite obtener la estimación dada por Rockafellar en ([5], Teorema 14.7), implícita en ([4]).

Referencias

[1] Hiriart-Urruty J., *ε-Subdifferential Calculus*, Convex Analysis and Optimization. Research Notes in Mathematics Series, Pitman Publisher, **57**, **43-92** **(1982)**.

[2] Ioffe A.D., Tikhomirov V.M., *Duality of Convex Functions and Extremum Problems*, Russian Mathematical Survey **23**, **53-124** **(1968)**.

[3] Moreau J.-J., *Fonctionnelles convexes*. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles II. Collège de France **(1966-1967)**.

[4] Moreau J.-J., *Sur la fonctionnelle polaire d'une fonction semi-continue supérieurement*. C.R. Acad.Sci.Paris, **258**, **1128-1131**, **(1964)**.

[5] Rockafellar R.T., it Convex Analysis, Princeton University Press (1970).

Dirección del autor:

Manuel Bustos Valdebenito
Instituto de Matemáticas
Universidad Austral de Chile
Casilla 567, Valdivia
mbustos@valdivia.uca.uach.cl