Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

Estabilidad de Sistemas*

Hernán Henríquez M.

Universidad de Santiago.
Departamento de Matemática.
Casilla 307, Correo 2. Santiago.

Resumen. El objetivo de este trabajo es presentar los aspectos esenciales del problema de estabilización de sistemas de control lineales invariantes, tanto de dimensión finita como infinita. La teoría general la aplicaremos al estudio de la estabilidad asintótica de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales funcionales lineales con retardo finito.

Contenido

*Este trabajo fue financiado parcialmente por los proyectos FONDECYT 1970716 y DICYT-USACH 04-9633 HM.

1 Introducción

Una constante preocupación del hombre ha sido la de controlar la evolución en el tiempo de ciertos dispositivos o mecanismos por él manipulados, en concordancia con normas preestablecidas. Mecanismos de este tipo han sido conocidos desde tiempos remotos; ya en el código de Hamurabi (aproximadamente, 2200 AC) se mencionan sistemas de regadio utilizados en la antigua Mesopotamia para regar los valles cultivables optimizando el uso de las aguas disponibles.

Aun así, el concepto de sistema de control no surge sino hasta el Siglo XVIII, con los trabajos de Huggens y Watt sobre la estabilidad de un sistema (creado por Watt) para controlar la velocidad en un ingenio de vapor. Estos trabajos fueron el punto de partida de una importante y prolífica investigación que perdura hasta nuestros días, y que originada por un problema concreto se ha transformado, con el paso del tiempo, en una investigación abstracta que, enunciada en nuestro lenguaje moderno, consiste en el estudio de la estabilidad de un oscilador sometido a perturbaciones.

Con los trabajos de Huggens y Watt se desencadena el estudio de una avalancha de sistemas de control, pero sólo en 1868 J. C. Maxwell[†] presentó la primera fundamentación matemática de un sistema de control, dando inicio a lo que ahora conocemos como Teoría Matemática de Control.

A pesar de esto, durante muchos años, inexplicablemente, las ideas de Maxwell permanecen ignoradas y no se vuelve a insistir en el análisis matemático de sistemas de control. Durante este período las técnicas empleadas para el estudio de los mecanismos de control fueron desarrolladas para cada caso particular, y el diseño de sistemas automáticos de control era esencialmente un arte.

Especial mención debemos hacer del espectacular avance, que en las dos décadas previas a la Segunda Guerra Mundial tuvo el diseño de sistemas automáticos de control utilizados en la navegación aérea y en los procesos químicos industriales. Desarrollo que sólo fue posible gracias al notable progreso que simultáneamente experimentó la teoría de circuitos electrónicos lo que, entre otras cosas, permitió la construcción de computadoras análogas, verdaderas almas de los mecanismos de control.

Es solo durante la Segunda Guerra Mundial, que con la creciente necesidad de sistemas automáticos cada vez más sofisticados y las exigencias de predecir el comportamiento dinámico de complejos sistemas, que se inicia el desarrollo de una teoría sistemática de los mecanismos de control, lo que rapidamente derivó en establecer la Teoría de Control como una ciencia en sí misma, con sus propios fundamentos, métodos, resultados y, por supuesto, problemas.

Este desarrollo se valió, en una primera etapa, de la aplicación de métodos operacionales, conocidos por los matemáticos desde los inicios de este siglo, a los sistemas

[†] J.C. Maxwell, "On governors", Proc. Royal Soc. of London, Vol. 16 (1968), 270-283.
Un "governor" es una parte de una máquina por medio de la cual la velocidad de la máquina se mantiene aproximadamente constante, aún en la presencia de algunas perturbaciones.

de control descritos matemáticamente por ecuaciones diferenciales lineales con un número finito de variables. Esta técnica permite transformar un problema en el dominio del tiempo en un problema equivalente en el dominio de la frecuencia. Varios conceptos, resultados y técnicas importantes para el estudio y diseño de sistemas de control fueron establecidos utilizando el análisis en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, los métodos operacionales no bastaron para trabajar con sistemas más complejos, haciendo necesario que el estudio de tales sistemas se realizara directamente en el dominio del tiempo.

Para la descripción de sistemas en el dominio del tiempo se requiere disponer de informaciones que caracterizen la estructura interna del sistema. Esta dificultad condujo a introducir en la teoría de control el concepto de "estado" , importante noción que domina la teoría de sistemas hasta hoy, y que había sido estudiada en el ámbito de las matemáticas por H. Poincaré.

La formulación por Evans en 1948 del método de "Root-Locus", fue un paso decisivo en esta dirección, pues enlazó magistralmente los métodos de análisis en el dominio de la frecuencia y del tiempo. Esta técnica combinada con las capacidades computacionales actuales, ha sido uno de los más poderosos instrumentos para la síntesis de sistemas de control lineales.

Así, hasta 1965 aproximadamente, el avance de la teoría estuvo centrado en aquellos sistemas cuyo modelo matemático consiste en una ecuación diferencial lineal, con un número finito de variables. Por este motivo, los fundamentos matemáticos requeridos para trabajar en esta teoría se limitaban al análisis clásico y al álgebra lineal. En la actualidad, sin embargo, los problemas que se están abordando necesitan de un fuerte soporte matemático en geometría, álgebra abstracta y análisis funcional.

Por otra parte, desde los inicios de la teoría de control, se sabe que de manera espontánea surgen en la naturaleza sistemas de control que no es posible modelarlos matemáticamente con un número finito de variables.

Esto ha motivado en los últimos veinte años, un intenso trabajo de investigación sobre sistemas de control descritos por ecuaciones con variables en un espacio de dimensión infinita, preferentemente espacios de Hilbert o de Banach.

La más antigua motivación para el estudio de sistemas con estados en un espacio de dimensión infinita proviene de fenómenos físicos descritos matemáticamente por ecuaciones diferenciales parciales.

Uno de los ejemplos más estudiados corresponde a la distribución de temperaturas en un sólido continuo homogéneo en una dimensión. El modelo matemático en este caso corresponde a la ecuación de difusión

$$\frac{\partial}{\partial t}w(\xi,t) = \mu\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}w(\xi,t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(\xi)u_i(t),$$

donde $w(\xi,t)$, $0 \leq \xi \leq 1$ y $t \geq 0$, representa la temperatura en la posición ξ y en el tiempo t; μ es un coeficiente y las funciones $u_i(t)$ representan la acción de control. Nuestro problema de control en este caso puede consistir en mantener la temperatura $w(\xi, t)$ en algún valor pre-asignado.

Los modelos matemáticos de procesos físicos, biológicos, económicos, etc., son simplificaciones de la realidad. Una de las simplificaciones más común es suponer que el proceso está regido por un principio de causalidad, esto es, que el estado futuro es determinado únicamente por el presente e independiente del pasado. Sin embargo, un análisis más cuidadoso nos lleva a concluir que para muchos procesos esta aproximación es insuficiente.

Sólo para ilustrar esta idea con una situación muy simple, mencionemos que Kalecki [16] obtuvo como modelo para las variaciones de capital $K(t)$ en una industria la ecuación

$$\frac{d}{dt}K(t) = a\,K(t) + b\,K(t-h) + c\,u(t)$$

donde a, b y c son constantes y el retardo $h > 0$ representa el tiempo transcurrido entre el momento en que se toma la decisión de invertir y el instante de liberar el capital. El problema de control es alcanzar un determinado nivel K_d de capital en un intervalo $[t_1, t_1 + h]$.

En estos ejemplos, como en muchos otros problemas concretos, es posible, a través de una transformación de variable, re-escribir el modelo como una ecuación diferencial

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.1}$$

donde la variable $x(t)$, que representa el estado del sistema en el tiempo t, pertenece a un espacio de Banach X y $u(t)$, que indica la acción de control, pertenece a un espacio de Banach U y, tanto A como B son operadores lineales, en general no acotados. Estos sistemas los denominaremos distribuidos, en oposición a la terminología de sistemas concentrados que se utiliza para los sistemas con estado en espacios de dimensión finita.

En el primer caso mencionado anteriormente, correspondiente al control de temperatura, el estado $x(t)$ es la función de temperatura $w(\cdot, t)$, en el espacio $X := L^2([0,1])$ y el operador A se define por la expresión

$$Aw(\xi, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi, t).$$

El espacio de controles U corresponde a $\mathbb{R}^m$ y el operador B queda definido por

$$Bu = \sum_{i=1}^{m} b_i(\xi) u_i.$$

Tanto el espacio de estado X como el de controles U se escogen considerando tanto aspectos prácticos como teóricos, los cuales se precisarán posteriormente. En la segunda situación considerada, suele escogerse como espacio de estado $X := \mathbb{R} \times$

$L^2([-h,0])$. El estado $x(t) := (K(t), K_t)$, donde K_t representa la "historia" de K antes de t durante un intervalo de tiempo de longitud h (es decir, $K_t(\theta) := K(t+\theta),\ -h \le \theta \le 0$), y el operador A se define por

$$A(\varphi(0), \varphi) = (a\varphi(0) + b\varphi(-h), \varphi').$$

En este caso, el espacio de controles $U := \mathbb{R}$ y el operador

$$Bu = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Naturalmente también existen procesos que sólo pueden describirse a través de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo

$$x''(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Como ejemplo bien conocido tenemos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} w(\xi, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w(\xi, t) + u(\xi, t), \quad t \ge 0,$$

con condiciones iniciales y de borde apropiadas.

La teoría se inició, como es natural, con el estudio de los sistemas descritos por una ecuación diferencial de primer orden, pero recientemente se han comenzado a investigar clases más amplias de sistemas, llegándose incluso a algunos sistemas definidos por ecuaciones integro-diferenciales de Volterra-Stieltjes.

En el caso particular de los sistemas de control descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden, continuando con las ideas de Fattorini [8], el principal instrumento matemático utilizado ha sido la teoría de semigrupos fuertemente continuos de operadores. Siguiendo un curso paralelo a la teoría en dimensión finita, la teoría de control en dimensión infinita se ha desarrollado rápidamente, estableciéndose como una teoría abstracta en espacios arbitrarios, que incluye un gran número de casos específicos. Además todos los conceptos de la teoría en dimensión finita pueden ser estudiados en dimensión infinita, requiriéndose sin embargo de hipótesis adicionales para la generalización de la mayoría de los resultados.

Usualmente, a la descripción dinámica (1.1) se agregan variables observadas $y(\cdot)$, pertenecientes a un espacio Y, y variables de control $z(\cdot)$, en un espacio Z, y relacionadas al estado $x(\cdot)$ por ecuaciones del tipo

$$y(t) = Cx(t), \tag{1.2}$$

$$z(t) = Dx(t), \tag{1.3}$$

donde $C : X \to Y$ y $D : X \to Z$ son operadores.

En sistemas distribuidos esto es especialmente importante, ya que por pertenecer el estado x a un espacio de dimensión infinita, no es posible esperar observarlo o controlarlo directamente.

El objeto de este trabajo es presentar los resultados esenciales relativos al problema de estabilidad asintótica para sistemas lineales invariantes, incluyendo desde los sistemas de dimensión finita hasta sistemas descritos por ecuaciones diferenciales parciales con retardo finito. Para mantener el texto en una extensión razonable, omitiremos el problema de estabilidad en términos de la salida observada $y(\cdot)$, conocidos como problemas de compensación estática y dinámica, y el problema relativo a conseguir que la variable controlada $z(\cdot)$ tienda a un valor de referencia, conocido como problema del regulador, los cuales se pueden estudiar con las técnicas que se desarrollarán. El lector interesado puede consultar las referencias indicadas en Henríquez [12].

2 Sistemas de control de parámetros concentrados.

Entenderemos por sistema de control de parámetros concentrados o de dimensión finita un sistema cuyo modelo matemático puede describirse mediante una ecuación diferencial lineal

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.1}$$

en la cual $x(t) \in \mathbb{C}^n$ representa el estado del sistema; $u(t) \in \mathbb{C}^m$ representa el control y tanto A como B son matrices de dimensiones apropiadas.

Consideremos inicialmente un sistema no controlado, esto es un sistema cuya evolución se describe por la ecuación diferencial

$$x'(t) = Ax(t). \tag{2.2}$$

Si para $t = 0$ este sistema es llevado a un estado $x(0) = x_0$, el comportamiento futuro del sistema se determina por la solución de la ecuación diferencial (2.2), que como sabemos es

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El problema de la estabilidad del sistema (2.2) consiste en determinar bajo qué condiciones la solución $x(t)$ converge a cero cuando $t \to +\infty$. El siguiente resultado (Hirsch y Smale [15]) es bien conocido.

Teorema 2.1 *Sea A una matriz real o compleja de $n \times n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La solución $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$.*

(b) *Los valores propios de A tienen parte real negativa.*

(c) *Existen constantes* $M \geq 1$ *y* $\omega < 0$ *tal que* $\|e^{At}\| \leq M\, e^{\omega t}$, $t \geq 0$.

(d) *Para cualquier matriz auto-adjunta definida positiva* Q *la ecuación*

$$A^{*}P + PA = -Q \tag{2.3}$$

tiene una única solución P *auto-adjunta y definida positiva.*

Se deduce de este resultado que para estos sistemas la estabilidad asintótica es una propiedad de la matriz A y no de cada solución particular. Esto motiva la siguiente definición, en la cual, asi como en todo el desarrollo que sigue, utilizamos el término estabilidad para referirnos a estabilidad asintótica.

Definición 2.1 *Una matriz* A *se llama estable si verifica cualquiera de las condiciones del teorema precedente.*

En la teoría que presentaremos a continuación el conjunto de los valores propios de A tiene una figuración relevante. Este conjunto se llama espectro de A y lo denotaremos por $\sigma(A)$. A veces, sin peligro de confusión, modificaremos levemente esta notación y $\sigma(A)$ será una n-tupla formada por los valores propios de A repetidos según su multiplicidad. Sea $s(A) := \sup\{Re(\lambda) \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}$. Entonces, de las propiedades de las normas en matrices, se obtiene la siguiente igualdad que relaciona los valores propios de A con la constante ω del Teorema 2.1

Proposición 2.1 *En las condiciones precedentes* $s(A) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{\ln \|e^{At}\|}{t}$ *y si* $\omega > s(A)$, *entonces existe una constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}$, *para todo* $t \geq 0$.

La ecuación matricial (2.3), conocida como ecuación de Liapunov, es poco utilizada para verificar la estabilidad de una matriz pero tiene gran importancia conceptual en relación con problemas de optimización.

Retornemos al sistema controlado (2.1). El objetivo de la existencia de controles es mejorar el comportamiento del sistema. Por lo tanto, en relación con el problema de estabilidad, podemos esperar que con una elección adecuada de la función de control u un sistema inestable se transforme en uno estable.

Considerando la importancia de los controles realimentados, supongamos que escogemos un control $u(\cdot)$ de la forma $u(t) = Fx(t) + v(t)$, para cierta matriz F de orden $m \times n$ y una función de control admisible $v(\cdot)$. Reemplazando en (2.1) obtenemos el siguiente sistema de control

$$x'(t) = (A + BF)x(t) + Bv(t), \tag{2.4}$$

lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.2 *El sistema (2.1) se llama estabilizable si existe una matriz F tal que $A+BF$ es estable.* .

Para caracterizar los sistemas estabilizables introduciremos la noción de controlabilidad, que es uno de los conceptos fundamentales de la teoría.

Definición 2.3 *El sistema de control (2.1) se llama controlable si para todo par de estados $x_0,\ x_1 \in \mathbb{C}^n$ y para todo par de tiempos $t_0 < t_1 < \infty$, existe una función de control admisible $u(\cdot)$ definida en $[t_0, t_1]$ que transfiere el estado x_0 en el tiempo t_0, al estado x_1 en el tiempo t_1* .

Considerando como controles admisibles a funciones al menos integrables, la solución de (2.1) se expresa por la fórmula de variación de constantes

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\, B\, u(s)\, ds,$$

de lo que se deduce que el sistema (2.1) es controlable si, y solamente si, la aplicación Γ de $L^1([t_0,t_1];\mathbb{C}^m)$ en $\mathbb{C}^n$ definida por

$$\Gamma(u) := \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu(s)\, ds$$

es epiyectiva.

Un problema relacionado con la controlabilidad y la estabilidad es conocido como problema de reubicación de polos (como también se denomina a los valores propios de la matriz del sistema).

Definición 2.4 *El sistema de control (2.1) verifica la propiedad de reubicación de polos si para todo $\Lambda \in \mathbb{C}^n$ existe F tal que $\sigma(A+BF) = \Lambda$.*

Utilizando un poco de álgebra lineal y las propiedades de la matriz exponencial, Kalman, Hautus y Wonham consiguieron relacionar estos conceptos (ver Wonham [27]). En el siguiente resultado hemos resumido las principales relaciones entre ellos.

Teorema 2.2 *Considerense las siguientes afirmaciones:*

(a) *El sistema (2.1) es controlable;*

(b) $\rho[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$;

(c) $\rho[\lambda I - A, B] = n$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(d) *El sistema (2.1) verifica la propiedad de reubicación de polos;*

(e) $\rho[\lambda I - A, B] = n$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) \geq 0$;

(f) *El sistema (2.1) es estabilizable.*

Entonces (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Leftrightarrow$ (f).

Es decir, todo sistema controlable es estabilizable. Puede también caracterizarse la estabilizabilidad utilizando la ecuación (2.3), o más precisamente, en término de una generalización de ella denominada ecuación algebraica de Riccati. En este texto no desarrollaremos este método ya que estamos interesados en resultados generalizables a espacios de Banach. Observese también que las condiciones (c) y (e) son de tipo espectral, ya que es evidente que ambas se mantienen para todo λ que no es valor propio de A y, por tanto, para aplicar el teorema sólo necesitamos verificarlas para los valores propios de A. Este tipo de condiciones serán las que podemos generalizar para sistemas distribuidos.

3 Semigrupos fuertemente continuos.

Como hemos mencionado en la introducción, el concepto fundamental para estudiar sistemas de control distribuidos es la noción de semigrupo de operadores. Por este motivo dedicamos esta sección a presentar los aspectos esenciales de la teoría de semigrupos. La mayoría de los resultados incluidos se encuentran en Nagel [20] o Pazy [22].

En esta sección como también en las siguientes denotaremos por X a un espacio de Banach, con norma $\|\cdot\|$ y por $\mathcal{L}(X)$ al espacio de los operadores lineales acotados de X en X, dotado con la norma de operadores. Otras notaciones son las usuales en teoría de operadores. En particular, representaremor por $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ al espacio dual de X y si $A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador lineal denotaremos por $\rho(A)$, llamado conjunto resolvente de A, al conjunto formado por los números $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A$ tiene inversa en $\mathcal{L}(X)$. En este caso, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ se llama operador resolvente de A. Además, el conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ se llama espectro de A. Una parte del espectro está formada por los valores propios de A. Este conjunto se llama espectro puntual de A y lo denotaremos por $\sigma_p(A)$. Finalmente, utilizaremos $\mathcal{R}$ para indicar la imagen de un operador.

Definición 3.1 *Llamaremos semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados (abreviado, semigrupo) en X a una aplicación $T : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$;

(b) $T(0) = I$;

(c) *La función* $t \to T(t)x$ *es continua, para cada* $x \in X$.

Para relacionar con la sección anterior observemos que si X un espacio normado de dimensión finita y A .: $X \to X$ una aplicación lineal, entonces $T(t) := e^{At}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Proposición 3.1 *Si* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es un semigrupo entonces existen constantes* $M \geq 1$ *y* $\omega \in I\!R$ *tal que* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$.

En el resto de esta sección supondremos que el semigrupo T y las constantes M y ω verifican la desigualdad anterior. El semigrupo T se llama uniformemente acotado si es posible escoger $\omega = 0$ y contractivo si es posible escoger $\omega = 0$ y $M = 1$. Esta propiedad justifica la siguiente definición.

Definición 3.2 *Llamaremos tipo (o constante de crecimiento) del semigrupo* $T(\cdot)$ *a la constante definida por* $\omega_0(T) = \lim_{t \to +\infty} \dfrac{\ln \|T(t)\|}{t}$.

Se deduce de la Proposición 3.1 que $-\infty \leq \omega_0(T) < +\infty$ y de la definición anterior sigue que para todo $\omega > \omega_0(T)$ existe una constante M para la cual se satisface la desigualdad indicada de la Proposición 3.1.

Definición 3.3 *Se llama generador infinitesimal de un semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *al operador* $A : D(A) \to X$ *definido mediante la expresión*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

en todos aquellos elementos $x \in X$ *donde el límite existe.*

A diferencia de lo efectuado en la sección 2, en el desarrollo que sigue denotaremos por A a un operador lineal usualmente no acotado. Algunas propiedades del generador infinitesimal son las siguientes:

Proposición 3.2 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo en* X *con generador infinitesimal* A *tal que* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. *Entonces:*

(a) *El operador* A *es lineal, cerrado y su dominio* $D(A)$ *es denso en* X.

(b) *Si* $x \in D(A)$ *entonces la función* $T(t)x$ *es continuamente derivable para* $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ *y*

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(c) *Si* $Re(\lambda) > \omega$ *entonces* $\lambda \in \rho(A)$,

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt, \quad x \in X$$

y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{Re(\lambda) - \omega}.$$

La Proposición 3.2 podemos reinterpretarla en términos de ecuaciones diferenciales. Llamaremos problema de Cauchy abstracto al problema de valores iniciales

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{3.1}$$

donde $x(t) \in X$. De la Proposición 3.2 parte (b), se deduce que si A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(\cdot)$ en X y $x_0 \in D(A)$, entonces la función $x(t) = T(t)x_0$ es una solución del problema (3.1). Puede mostrarse también que esta es la única solución de (3.1).

Consideremos ahora el problema de Cauchy no homogéneo

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

donde $x(t) \in X$ y f es una función de $[0, \infty)$ en X.

Proposición 3.3 *Si la función* $f : [0, +\infty) \to X$ *es continuamente derivable y* $x_0 \in D(A)$ *entonces la función*

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \tag{3.3}$$

es la única solución del problema (3.2).

Como el miembro derecho de (3.3) está bien definido aun cuando $x_0 \notin D(A)$ y f no sea continuamente derivable, es más frecuente utilizar el siguiente concepto de solución.

Definición 3.4 *Si* $f : [0, \infty) \to X$ *es una función localmente integrable y* $x_0 \in X$, *se llama solución débil de (3.2) a la función definida en (3.3).*

El problema de la estabilidad asintótica en espacios de Banach es más complicado que en espacios de dimensión finita, ya que en este caso surgen varios conceptos no equivalentes de estabilidad, los cuales son utilizados a menudo. Los principales de ellos son los siguientes.

Definición 3.5 *Un semigrupo* $T(\cdot)$ *en* X *se llama:*

(a) *Uniformemente estable si* $\|T(t)\| \to 0, \ t \to +\infty$.

(b) *Fuertemente estable si* $T(t)x \to 0, \ t \to +\infty$, *para todo* $x \in X$.

(c) *Débilmente estable si* $< x', T(t)x > \to 0, \ t \to +\infty$, *para todo* $x \in X$ *y todo* $x' \in X'$.

Se puede verificar fácilmente que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ y que todo semigrupo débilmente estable es uniformemente acotado. Además, estas tres clases de semigrupos son diferentes, lo que ilustraremos posteriormente a través de ejemplos. Hay numerosos trabajos dedicados a estudiar la estabilidad de semigrupos. En la mayoría de ellos se busca relacionar algún concepto de estabilidad con una propiedad espectral del generador infinitesimal del semigrupo. No pretendemos hacer una lista exhaustiva de referencias. Mencionemos solamente que para aspectos generales puede consultarse Nagel [20] y Pritchard y Zabczyk [23], resultados específicos para semigrupos positivos se encuentran en Nagel [20], Clement y Heijmans [5] y Arendt [1] y para estabilidad fuerte puede consultarse Batty y Phóng [3] y sus referencias.

En nuestro trabajo estamos especialmente interesados en el concepto de estabilidad uniforme. La siguiente caracterización (Datko [7]) es fundamental.

Proposición 3.4 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X. Entonces T es uniformemente estable si, y solamente si, $\omega_0(T) < 0$.*

Esta caracterización tiene el inconveniente que requiere estimar el tipo del semigrupo pero usualmente solo se tiene información sobre el generador infinitesimal A. Comparando con el desarrollo efectuado para matrices esperamos poder relacionar la estabilidad del semigrupo con el espectro de A. Con este objeto definimos $s(A) := \sup\{Re(\lambda) \ : \ \lambda \in \sigma(A)\}$. De la Proposición 3.2(c) se deduce que $s(A) \leq \omega_0(T)$. Si, tal como ocurre para la matriz exponencial, se mantuviera la igualdad $s(A) = \omega_0(T)$ entonces para concluir la estabilidad uniforme del semigrupo T bastaría verificar que $s(A) < 0$. Sin embargo, la igualdad anterior no es válida en general para semigrupos (Zabczyk [29]). Esto llevó a Triggiani [26] a introducir la siguiente clase de semigrupos.

Definición 3.6 *Diremos que un semigrupo $T(\cdot)$ verifica la Condición de Crecimiento Espectral Determinado (SDGA) si vale la igualdad $s(A) = \omega_0(T)$.*

Afortunadamente la mayoría de los semigrupos que surgen en las aplicaciones verifican SDGA. Tanto para precisar un poco esta afirmación como para nuestros objetivos futuros, introduciremos algunas clases particulares de semigrupos.

Definición 3.7 *Sea T un semigrupo fuertemente continuo en X.*

(a) *El semigrupo T se llama uniformemente continuo para $t > a$ si la función $T(\cdot)$ es continua en la norma de operadores para $t > a$.*

(b) *El semigrupo T se llama compacto para $t > a$ si los operadores $T(t)$, $t > a$, son compactos y T se llama compacto si lo es para $t > 0$.*

Es fácil verificar que todo semigrupo compacto para $t > a$ es uniformemente continuo para $t > a$. De manera similar, los semigrupos diferenciables, en particular los holomorfos, son uniformemente continuos para algún $a > 0$. La relación de estos conceptos con el problema de estabilidad se resume en el siguiente resultado.

Proposición 3.5 *Si un semigrupo es uniformemente continuo para $t > a$ entonces verifica la SDGA.*

Los semigrupos compactos tienen propiedades adicionales muy importantes en relación con la estabilidad. A continuación mencionamos algunas de ellas.

Proposición 3.6 *Sea T un semigrupo compacto con generador infinitesimal A. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El operador $R(\lambda, A)$ es compacto, para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

(b) *El espectro de A consiste sólo de valores propios de A.*

(c) *Si T es débilmente estable entonces T es uniformemente estable.*

Para definir controles realimentados será fundamental perturbar el generador infinitesimal de un semigrupo. El siguiente resultado establece que esto es posible.

Proposición 3.7 *Si T es un semigrupo con generador infinitesimal A y $D \in \mathcal{L}(X)$ entonces $A + D$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo en X.*

A continuación ilustraremos estos conceptos con dos ejemplos directamente relacionados con nuestros objetivos de estabilización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales funcionales.

Ejemplo 3.1 Sea X el espacio $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ y $T(t)$ el operador definido por

$$T(t)f(\xi) := f(\xi + t), \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Entonces T es un semigrupo fuertemente continuo en X, conocido como semigrupo de traslaciones. Además, T es débilmente estable pero no es fuertemente estable. En efecto, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ entonces $\|T(t)f\|_p = \|f(\xi + t)\|_p = \|f\|_p$ de modo que $T(t)f$ no converge a cero cuando $t \to \infty$. Se deduce también de la igualdad anterior que $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \geq 0$. Sin embargo, T es débilmente estable, ya que si $g \in X' = L^q(\mathbb{R})$, con q exponente conjugado de p, entonces $< T(t)f, g > \to 0$, $t \to \infty$. En efecto, es fácil verificar que es suficiente mostrar esta propiedad cuando f y g pertenecen a subconjuntos densos de $L^p(\mathbb{R})$ y $L^q(\mathbb{R})$, respectivamente. Si escogemos f y g como funciones continuas con soporte compacto, la afirmación es consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Ejemplo 3.2 Sea X un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión de números complejos y definamos el operador A por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n$$

en el dominio

$$D(A) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \, | < x, e_n > |^2 < \infty\}.$$

Si $\sup_{n\in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) < \infty$ entonces A genera un semigrupo fuertemente continuo T definido por

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} < x, e_n > e_n.$$

Si $\sup_{n\in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) < 0$ entonces T es uniformemente estable. Sin embargo, en el caso en que cada $Re(\lambda_n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $\sup_{n\in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) = 0$ entonces T es fuertemente estable pero no uniformemente estable. Por otra parte, si $Re(\lambda_n) \to -\infty$, $n \to \infty$, entonces T es un semigrupo compacto y si λ_n son números reales entonces T es autoadjunto.

Un caso particular de este ejemplo se obtiene en el espacio $X = L^2([0, \pi])$ para el operador A definido por

$$Af(\xi) := f''(\xi)$$

con dominio

$$D(A) = \{f \in L^2([0, \pi]) : f'' \in L^2([0, \pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Es bien conocido que A tiene sólo espectro puntual, los valores propios son $-n^2, n \in \mathbb{N}$, con vectores propios normalizados $z_n(\xi) = (2/\pi)^{1/2} \sin(n\xi)$. El conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de X y si $f \in D(A)$ entonces $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 < f, z_n > z_n$. De las observaciones previas deducimos que A genera un semigrupo compacto, autoadjunto y uniformemente estable.

Comparando con el concepto de estabilización introducido en la sección anterior para sistemas concentrados, podemos esperar que si un semigrupo T con generador infinitesimal A no es estable, es posible que exista un operador lineal acotado D tal que el semigrupo generado por $A + D$ sea estable. El siguiente Teorema (Henríquez [13]), que extiende un resultado previo de Gibson [9] establece que para sistemas distribuidos la estabilización es difícil de conseguir.

Teorema 3.1 *Sea T un semigrupo débilmente estable con generador infinitesimal A y sea D un operador lineal compacto. Si el semigrupo S generado por $A + D$ es uniformemente estable entonces T también es uniformemente estable.*

Para nuestros fines de estabilización, la forma negativa del resultado anterior es más significativa. Es decir, si un semigrupo débilmente estable no es uniformemente estable entonces es imposible que el semigrupo generado por $A + D$, con D compacto, sea uniformemente estable.

Para el desarrollo que efectuaremos posteriormente ciertas formas especiales de semigrupos nos serán de gran utilidad.

Si X_1 y X_2 son espacios de Banach entonces el producto $X = X_1 \times X_2$ es un espacio de Banach. Si $A_{11} : D(A_1) \to X_1$ y $A_{22} : D(A_{22}) \to X_2$ son generadores infinitesimales de los semigrupos T_1 y T_2, respectivamente, y $A_{12} : X_2 \to X_1$ y $A_{21} : X_1 \to X_2$ son operadores lineales continuos, entonces el operador $A : D(A) \subseteq X \to X$ con dominio $D(A) = D(A_{11}) \times D(A_{22})$ y definido por la expresión

$$A := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

es el generador infinitesimal de un semigrupo T en X. Cuando el operador A tiene forma triangular, es decir $A_{12} = 0$ o $A_{21} = 0$, entonces es posible obtener buenas estimaciones para el tipo del semigrupo T.

Proposición 3.8 *Si A_{11} y A_{22} son generadores infinitesimales de los semigrupos T_1 y T_2, respectivamente, y si $A_{21} : X_1 \to X_2$ es un operador lineal acotado, entonces el operador lineal* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ *es el generador infinitesimal de un semigrupo T en X. Además $\omega_0(T) = max\{\omega_0(T_1), \omega_0(T_2)\}$ y*

$$T(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) & 0 \\ T_{21}(t) & T_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $T_{21}(t)$ es el operador definido por la expresión

$$T_{21}(t)x := \int_0^t T_2(t-s)A_{21}T_1(s)x\,ds, \quad x \in X_1.$$

La demostración de este resultado se encuentra en Schumacher [24].

Una situación muy frecuente es el problema inverso, es decir, disponer de un semigrupo T definido en X y con generador infinitesimal A y buscar una representación de A en forma triángular. Con este objeto introduciremos la siguiente definición.

Definición 3.8 *Un subespacio vectorial cerrado V de X se llama invariante bajo T si $T(t)(V) \subseteq V$, para todo $t \geq 0$.*

En este caso, $S(t) = T(t)|_V$ define un semigrupo en V con generador infinitesimal $\tilde{A}$ definido en $D(\tilde{A}) = D(A) \cap V$ por $\tilde{A}x = Ax$. Naturalmente el operador $\tilde{A}$ lo denotaremos por $A|_V$.

Supongamos que es posible descomponer el espectro de A en dos conjuntos disjuntos σ_1 y σ_2 de forma tal que σ_1 está contenido en el interior de una curva cerrada, simple y rectificable Γ mientras que σ_2 esta contenido en el exterior de Γ. En este caso podemos definir el operador lineal acotado

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

La demostración de las siguientes propiedades está en Kato [17].

(a) La aplicación P es una proyección en X que conmuta con $T(t)$ y con A, es decir $PD(A) \subseteq D(A)$ y $APx = PAx$, para todo $x \in D(A)$.

(b) Si $X_1 := \mathcal{R}(P)$ y $X_2 := \mathcal{R}(I - P)$ entonces $X = X_1 \oplus X_2$ es una descomposición topológica de X en espacios invariantes bajo T.

(c) Si $T_i := T|_{X_i}$ y A_i es el generador infinitesimal de T_i, $i = 1, 2$, entonces $\sigma(A_1) = \sigma_1$ y $\sigma(A_2) = \sigma_2$.

(d) El operador A_1 es lineal acotado, $D(A_1) = X_1$ y $T_1(t) = e^{A_1 t}$.

4 Sistemas distribuidos.

Los sistemas de control bajo consideración serán aquellos que pueden se modelados por

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.1}$$

donde el estado $x(t)$ pertenece a un espacio de Banach de dimensión infinita X, A es el generador infinitesimal de un semigrupo T en X y $B : U \to X$ es un operador lineal continuo. Consideraremos como controles admisibles a las funciones $u(\cdot)$ localmente integrables en sentido de Bochner y como trayectorias admisibles a las soluciones débiles de (4.1). Es decir

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)\, ds$$

representará a la trayectoria que se inicia en x_0 con función de control $u(\cdot)$.

Los aspectos generales de la teoría de control para este tipo de sistema se encuentran en Curtain [6]. En este trabajo sólo estudiaremos la estabilizabilidad en sentido uniforme. Para resultados generales relativos a estabilizabilidad en sentido fuerte en espacios de Hilbert puede consultarse Balakrishnan [2], Levan y Rigby [18] y Levan [19], mientras que la relación entre controlabilidad y estabilizabilidad en sentido débil en espacios de Hilbert fue estudiada por Benchimol [4].

Definición 4.1 *Diremos que el sistema (4.1) es (uniformemente) estabilizable si existe un operador lineal acotado* $F : X \to U$ *tal que el semigrupo generado por* $A + BF$ *es uniformemente estable.*

Como aplicación del Teorema 3.1 podemos afirmar que si T es un semigrupo débilmente estable pero no uniformemente estable y B es un operador compacto entonces el sitema (4.1) no puede ser estabilizado. Como en problemas concretos el espacio de controles U es un espacio de dimensión finita, el operador B es compacto de lo que se deduce que este tipo de sistemas no puede ser estabilizado, lo que constituye una diferencia fundamental con los sistemas concentrados tratados en la sección 2.

Para los sistemas de control (4.1) existen también diversos conceptos de controlabilidad. Si $t_1 > 0$, denotaremos por Γ a la aplicación definida por la expresión

$$\Gamma(u) := \int_0^{t_1} T(t_1 - s)Bu(s)\, ds$$

de $L^p([0,t_1],U)$ en X, $1 \leq p \leq \infty$. Naturalmente la aplicación Γ depende de t_1, pero omitiremos esta dependencia para no recargar la notación y designaremos por $\mathcal{R}(t_1)$ a la imagen de Γ.

Definición 4.2 *El sistema (4.1) se llama exactamente controlable en el intervalo* $[0,t_1]$ *si* Γ *es epiyectiva y diremos que (4.1) es controlable en tiempo finito si* $\cup_{t>0}\mathcal{R}(t) = X$.

A continuación establecemos un par de resultados que ilustran el hecho que los sistemas distribuidos no suelen ser exactamente controlables (Henríquez [13]).

Teorema 4.1 *Sea* $p > 1$. *Si el operador* $T(t)B$ *es compacto, para todo* $t > 0$, *entonces* Γ *también es compacto y si* B *es compacto entonces* Γ *es compacto en* $L^1([0,t_1],U)$.

Como un operador con valores en X no puede ser compacto y epiyectivo simultáneamente, bajo las hipótesis del teorema anterior el sistema no puede ser exactamente controlable. Otro resultado de falta de controlabilidad exacta para este tipo de sistemas de control se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.2 *Sea* $p > 1$. *Si el semigrupo* $\{ T(t) : t \geq 0 \}$ *es diferenciable para* $t > a \geq 0$ *y si* Γ *es un operador epiyectivo, entonces* A *es un operador lineal acotado.*

Ya hemos mencionado que usualmente el espacio de controles U es $\mathbb{C}^m$ por lo cual B es compacto. Veremos en las secciones siguientes que también es muy frecuente que el semigrupo T sea compacto. En todos estos casos el sistema no puede ser exactamente controlable. Por este motivo para sistemas distribuidos es más útil un concepto más débil de controlabilidad.

Definición 4.3 *El sistema (4.1) se llama aproximadamente controlable en el intervalo* $[0, t_1]$ *si el espacio* $\mathcal{R}(t_1)$ *es denso en* X *y, aproximadamente controlable en tiempo finito si* $\cup_{t>0}\mathcal{R}(t)$ *es denso en* X.

En Curtain y Pritchard [6] se encuentran caracterizaciones de la controlabilidad aproximada para diversos tipos de sistemas. En particular, el siguiente resultado general ha sido obtenido por Fattorini.

Proposición 4.1 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El sistema (4.1) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$.

(b) *Si* $x' \in X'$ *es tal que* $B'T(t)'x' = 0$, *para todo* $0 \leq t \leq t_1$, *entonces* $x' = 0$.

La siguiente aplicación de esta Proposición será muy importante para nosotros. Supongamos que existe una descomposición topológica $X = X_1 \oplus X_2$ donde X_1 es un subespacio invariante bajo T. Sea P_1 la proyección sobre X_1 con núcleo X_2, $T_1 := T|_{X_1}$ y A_1 el generador infinitesimal de T_1. Entonces podemos considerar el sistema de control

$$x_1{}'(t) = A_1 x_1(t) \; + \; P_1 B u(t) \tag{4.2}$$

con espacio de estado X_1.

Corolario 4.1 *Si el sistema (4.1) es aproximadamente controlable en* $[0, t_1]$ *o aproximadamente controlable en tiempo finito entonces lo mismo ocurre con el sistema (4.2). Además, si* X_1 *es un espacio de dimensión finita entonces (4.2) es exactamente controlable* .

Retornando al problema de la estabilización de sistemas lineales, ha sido demostrado por Triggiani que no existe una relación directa entre controlabilidad aproximada y estabilización. Sin embargo, es posible reestablecer dicha relación para una clase de sistemas que incluye a la mayoría de los sistemas de interés práctico. Con este objeto introducimos el siguiente concepto.

Definición 4.4 *Diremos que el generador infinitesimal* A *satisface la Condición de Descomposición Espectral (SDA) si existe una constante* $\gamma > 0$ *tal que el conjunto*

$$\sigma_1 := \{\lambda \in \sigma(A) : Re(\lambda) > -\gamma\}$$

es compacto.

Si definimos el conjunto

$$\sigma_2 := \{\lambda \in \sigma(A) : Re(\lambda) \leq -\gamma\}$$

entonces $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ y esta descomposión del espectro satisface las condiciones estudiadas en la sección 3. Por lo tanto, la descomposición de $\sigma(A)$ induce una descomposición del espacio $X = X_1 \oplus X_2$ con las propiedades ya conocidas. Consideremos los subsistemas (4.2) y

$$x_2'(t) = A_2 x_2(t) + P_2 B u(t) \tag{4.3}$$

entonces el siguiente resultado ha sido establecido por Triggiani [26].

Teorema 4.3 *Supongase que el operador A satisface la Condición de Descomposición Espectral y que se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El sistema de control (4.1) es aproximadamente controlable en tiempo finito;*

(b) *El sistema (4.3) satisface la Condición de Crecimiento Espectral Determinado;*

(c) *El espacio X_1 tiene dimensión finita.*

entonces el sistema (4.1) es estabilizable.

Demostración El sistema (4.2) resulta ser controlable y como es de dimensión finita, aplicando el Teorema 2.2 se deduce la existencia de una realimentación $F_1 : X_1 \to U$ tal que el semigrupo $S_1(t)$ generado por $A_1 + P_1 B F_1$ es estable. Se define $F : X \to U$ por $Fx = F_1 P_1 x$. Es fácil verificar que el semigrupo $S(t)$ generado por $A + BF$ es $S(t)x = S_1(t)P_1 x + T_2(t)P_2 x$, lo cual muestra que S es uniformemente estable. ∎

Si bien este resultado es muy simple, es aplicable a gran cantidad de sistemas concretos. La condición (c) se obtiene, por ejemplo, cuando σ_1 es un conjunto finito de valores propios de A con multiplicidad geométrica finita. En las secciones siguientes trataremos con detalle sistemas con retardo. Mostraremos que estos sistemas verifican las hipótesis del Teorema 4.3 y que pueden ser estabilizados con controles de dimensión finita.

5 Ecuaciones Diferenciales Funcionales con Retardo.

En esta sección presentamos un breve resumen de las propiedades espectrales de las ecuaciones diferenciales funcionales con retardo.

La generalización inmediata de la ecuación diferencial vectorial

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

para incluir retardos es la ecuación

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-r) + f(t),$$

con $x(t) \in \mathbb{C}^n$, A y B matrices de $n \times n$ y donde $r > 0$ indica el retardo de la ecuación. Para resolver esta ecuación a partir de $t = 0$ se requiere conocer los valores

$x(\theta)$, con $-r \leq \theta \leq 0$. Esto lleva a estudiar este problema en el espacio de las funciones continuas $C := C([-r,0]; \mathbb{C}^n)$. Se introduce la notación $x_t : [-r,0] \to \mathbb{C}^n$ para representar la función definida por $x_t(\theta) := x(t+\theta)$. Con estas notaciones la ecuación anterior es un caso particular de la ecuación

$$x'(t) = L(x_t) + f(t) \tag{5.1}$$

donde $L : C \to \mathbb{C}^n$ es una aplicación lineal continua. La aplicación L puede ser representada por una integral de Riemann-Stieltjes

$$L(\varphi) = \int_{-r}^{0} d_\theta N(\theta)\varphi(\theta), \quad \varphi \in C,$$

donde $N : [-r,0] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función matricial de variación acotada. A este tipo de ecuaciones las denominaremos ecuaciones diferenciales (ordinarias) funcionales con retardo, que abreviaremos por **RFDE**.

Consideremos inicialmente el problema homogéneo

$$x'(t) = L(x_t), \quad t \geq 0, \tag{5.2}$$

$$x_0 = \varphi \tag{5.3}$$

cuya solución la denotaremos por $x(\cdot,\varphi)$. Se define el operador $V(t) : C \to C$, denominado operador de solución, por

$$V(t)\varphi := x_t(\cdot,\varphi).$$

El siguiente resultado se encuentra en Hale [10], Hale-Lunel [11].

Teorema 5.1 *En las condiciones precedentes:*

(a) *La aplicación V es un semigrupo fuertemente continuo en C cuyo generador infinitesimal A_V es el operador definido por*

$$A_V\varphi := \varphi'$$

en el dominio $D(A_V) = \{\varphi \in C : \varphi' \in C, \ \varphi'(0) = L(\varphi)\}$.

(b) *El semigrupo $V(t)$ es compacto para $t \geq r$ y diferenciable para $t > r$.*

(c) *El espectro de A_V coincide con su espectro puntual y $\lambda \in \sigma(A_V)$ si, y solamente si, $\det\Delta(\lambda) = 0$, donde $\Delta(\lambda)$ es la matriz*

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - L(e^{\lambda\theta} I).$$

(d) *Si* $\lambda \in \sigma(A_V)$ *entonces el espacio de vectores propios generalizados*

$$M_\lambda(A_V) := \cup_{i=1}^{\infty} Ker(\lambda I - A_V)^i$$

tiene dimensión finita, el ascendente de $\lambda I - A_V$ *es finito* ($= k$) *y*

$$C = Ker(\lambda I - A_V)^k \oplus \mathcal{R}(\lambda I - A_V)^k.$$

(e) *Para todo* $\gamma \in I\!R$ *el conjunto* $\{\lambda \in \sigma(A_V) : Re(\lambda) \geq \gamma\}$ *es finito.*

Se observa fácilmente que la matriz $\Delta(\lambda)$ es la generalización de la matriz característica $\lambda I - A$ para el sistema (2.2). Las propiedades (b), (d) y (e) garantizan que el sistema (5.2) satisface las condiciones SDGA y SDA estudiadas en las secciones anteriores. Por el Teorema 4.3 la posibilidad de estabilizar un sistema modelado por una RFDE dependerá de la controlabilidad aproximada del sistema. Para evitar esta condición se necesita una buena caracterización de los espacios que figuran en la descomposición establecida en (d).

De la afirmación (d) se deriva la siguiente propiedad de descomposición. Sean λ_i, $i = 1, \cdots, l$, valores propios de A_V con multiplicidad geométrica d_i. Sean $\Lambda := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ y $P_\Lambda := \oplus_{i=1}^{l} M_{\lambda_i}(A_V)$. La dimensión de P_Λ es $d = \sum_{i=1}^{l} d_i$. Si $\Phi := [\varphi_1, \cdots, \varphi_d]$ es una base de P_Λ, entonces se deduce de la invariancia de P_Λ bajo A_V que existe una matriz H con $\sigma(H) = \Lambda$ tal que

$$A_V \Phi = \Phi H.$$

De esta igualdad y de la definición de A_V resulta que

$$\Phi(\theta) = \Phi(0) e^{H\theta}, \quad -r \leq \theta \leq 0,$$

y que

$$V(t)\Phi = \Phi e^{Ht}, \quad t \geq 0,$$

Es decir, en el subespacio P_Λ el semigrupo $V(t)$ actúa como una exponencial usual.

Del Teorema 5.1 (d) se deduce que podemos descomponer C en la forma

$$C = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda \tag{5.4}$$

donde Q_Λ es invariante bajo $V(t)$. Denotemos por $V_P(t)$ y $V_Q(t)$ las restricciones de $V(t)$ en P_Λ y Q_Λ, respectivamente. En particular, fijemos $\gamma \in I\!R$ y escojamos como Λ el conjunto $\{\lambda \in \sigma(A_V) : Re(\lambda) \geq \gamma\}$. De los resultados anteriores se obtiene la siguiente propiedad de acotamiento : existe una constante $M \geq 1$ tal que

$$\|V_Q(t)\| \leq M e^{\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

En consecuencia, si $\sigma(A_V) \subseteq \mathbb{C}^-$ podemos escoger $Q_\Lambda = C$ de lo cual se deduce que existen constantes $M \geq 1$ y $\gamma > 0$ tal que

$$\|V(t)\| \leq Me^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

es decir el sistema es asintóticamente estable.

Retornando al caso general, la determinación del espacio Q_Λ es esencial en los resultados que siguen. Con este objeto, se introduce la ecuación diferencial funcional adjunta formal de (5.2)

$$y'(s) = -\int_{-r}^{0} y(s-\theta)\, d_\theta N(\theta), \quad s \leq r, \;\; y(s) \in \mathbb{C}^{n*},$$

donde $\mathbb{C}^{n*}$ denota el espacio de vectores fila, la cual se resuelve en el espacio $C^* := C([0,r];\mathbb{C}^{n*})$ con resultados similares a los mencionados para (5.2). En particular, se definen $V^*(t)$ y A_V^*. Se obtiene $\sigma_p(A_V^*) = \sigma(A_V^*) = \sigma(A_V)$, $C^* = P_\Lambda^* \oplus Q_\Lambda^*$ y $dim(P_\Lambda^*) = dim(P_\Lambda)$. Para relacionar los diferentes espacios de estas descomposiciones se define la forma bilineal

$$< \psi, \varphi > := \psi(0)\varphi(0) \; - \int_{-r}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)[d_\theta N(\theta)]\varphi(\xi)\, d\xi$$

en $C^* \times C$. Se escoge una base $\Psi = [\psi_1, \cdots, \psi_d]^t$ de P_Λ^* tal que $< \Psi, \Phi >= I$. Entonces

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \{\varphi \in C : \varphi = \Phi a, \;\; a =< \Psi, \varphi >\}, \\ Q_\Lambda &= \{\varphi \in C :< \Psi, \varphi >= 0\} \end{aligned}$$

y

$$\Psi(s) = e^{-Hs}\Psi(0). \tag{5.5}$$

Una consecuencia de la descomposición (5.4) y de la caracterización anterior es la fórmula de variación de constantes en P_Λ. Sea $x(\cdot)$ la solución de la ecuación (5.1) con condición inicial (5.3). Si x_t^P es la proyección de x_t en P_Λ entonces $x_t^P = \Phi < \Psi, x_t >$. Denotando por $c(t) :=< \Psi, x_t >$, de las propiedades de la ecuación adjunta formal se obtiene que

$$\begin{aligned} c'(t) &= Hc(t) + \Psi(0)f(t), & (5.6)\\ c(0) &= < \Psi, \varphi > & (5.7) \end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria en $\mathbb{C}^d$.

6 Estabilización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales funcionales con retardo.

Los resultados de la sección anterior permiten caracterizar la propiedad de estabilización de los sistemas de control descritos por RFDE. Consideremos el sistema descrito por la ecuación diferencial funcional con retardo $r > 0$

$$x'(t) = L(x_t) + Bu(t) \tag{6.1}$$

donde $L : C \to \mathbb{C}^n$ es una aplicación lineal continua y B es una matriz de $n \times m$.

Definición 6.1 *El sistema (6.1) se llama estabilizable si existe una aplicación lineal continua $K : C \to \mathbb{C}^m$ tal que el sistema*

$$x'(t) = (L + BK)(x_t) \tag{6.2}$$

es estable.

A continuación utilizaremos los símbolos V, A_V, Δ, etc. introducidos en la sección anterior en relación al sistema homogéneo

$$x'(t) = L(x_t).$$

El problema de estabilización está relacionado con la siguiente versión del problema de reubicación de polos. Supongamos que los valores propios de A_V son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$, $\lambda_{l+1}, \cdots$ con ascendentes k_i y multiplicidad geométrica d_i, respectivamente. Sean $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A_V)$. El problema de reubicación de polos consiste en caracterizar los pares (L, B) para los cuales existe K de modo que los polos de (6.2) sean $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, \lambda_{l+1}, \cdots$. Es inmediato que si la reubicación de polos es posible entonces el sistema es estabilizable. En efecto, basta escoger l de modo que $\sup_{i \geq l+1} \lambda_i < 0$. Sea $\Lambda := \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l\}$. El siguiente resultado ha sido establecido por Pandolfi [21].

Teorema 6.1 *Si $\rho[\Delta(\lambda), B] = n$, para todo $\lambda \in \Lambda$ entonces el sistema (6.1) es estabilizable.*

Demostración. Sean H, P_Λ, Q_Λ, d, etc. asociadas al conjunto Λ como en la sección 5. Sea $x(\cdot)$ solución de (6.1). De la fórmula de variación de constantes en P_Λ se deduce que la función $c(t)$ en la expresión $x_t^P = \Phi < \Psi, x_t >= \Phi c(t)$ verifica la ecuación

$$c'(t) = Hc(t) + \Psi(0)Bu(t) \tag{6.3}$$

la cual representa un sistema de control con estados en $\mathbb{C}^d$ y polos $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$. Las ideas esenciales de la demostración son las siguientes:

(i) Un vector $v \in \mathbb{C}^{d^*}$ es vector propio izquierdo de H con respecto a λ si, y solamente si,

$$v\Psi(\theta) = v\Psi(0)e^{-\lambda\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq r.$$

En efecto, de (5.5) se obtiene

$$v\Psi(0) = ve^{-Hs}\Psi(0) = v\Psi(0)e^{-\lambda s}, \quad 0 \leq s \leq r,$$

si, y solamente si, $vH = \lambda v$.

(ii) Utilizando el resultado anterior puede verificarse que

$$\rho[\Delta(\lambda),\, B] = n \Leftrightarrow \rho[\lambda I - H,\, \Psi(0)B] = d.$$

(iii) Reuniendo el resultado precedente con el Teorema 2.2, se deduce que si $\rho[\Delta(\lambda), B] = n$ entonces para el sistema de parámetros concentrados (6.3) se verifica la propiedad de reubicación de polos. En consecuencia, si escogemos $\mu_1, \cdots, \mu_l < 0$ existe F tal que $\sigma(H + \Psi(0)BF) = \{\mu_1, \cdots, \mu_l\}$.

(iv) Se define

$$K(\varphi) := F < \Psi, \varphi > .$$

Sean $\tilde{L} = L + BK$ y $\tilde{V}(t)$, con generador infinitesimal $\tilde{A}_V$, el semigrupo solución del sistema homogéneo

$$x'(t) = \tilde{L}(x_t). \tag{6.4}$$

(v) Si $\varphi \in Q_\Lambda$ entonces $\tilde{V}(t)\varphi = V(t)\varphi$. En particular, el espacio Q_Λ es invariante bajo $\tilde{V}(t)$.

(vi) De la propiedad anterior se deduce que $\sigma(\tilde{A}_V) = \{\mu_1, \cdots, \mu_l, \lambda_i : i \geq l+1\}$ lo cual, por los resultados de estabilidad establecidos en la sección 5, implica que el sistema (6.4) es estable.

7 Ecuaciones diferenciales funcionales parciales con retardo.

La clase de ecuaciones diferenciales funcionales estudiada en la sección 5 no incluye ecuaciones integro-diferenciales parciales que surgen en el estudio de problemas tales como conducción de calor en materiales con memoria o dinámica de poblaciones para poblaciones con distribución espacial. Como modelo podemos considerar el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}w(\xi,t) &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}w(\xi,t) + \int_{-r}^{0} d_\theta N(\theta)w(\xi,t+\theta) + f(\xi,t), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad t \geq 0, \\
w(0,t) &= w(1,t) = 0
\end{aligned}$$

donde $r > 0$, la función escalar $N(\cdot)$ tiene variación acotada en $[-r, 0]$ y f es una función apropiada. Usualmente estas ecuaciones surgen por linealización de una ecuación semi-lineal. Considerando $x(t) := w(\cdot, t)$ esto nos lleva a estudiar ecuaciones en las cuales los valores $x(t)$ pertenecen a espacios de Banach X de dimensión infinita.

Por este motivo, en esta sección estudiaremos las ecuaciones diferenciales funcionales que pueden ser modeladas en la forma

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + f(t), \quad t \geq 0. \tag{7.1}$$

donde $A : D(A) \subseteq X \to X$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineales acotados $T(t)$ en X y $L : C \to X$ es una aplicación lineal acotada definida por

$$L(\varphi) := \int_{-r}^{0} d_\theta N(\theta)\varphi(\theta)$$

donde por C denotamos el espacio $C([-r, 0]; X)$ y $N : [-r, 0] \to \mathcal{L}(X)$ es una aplicación de variación acotada.

Estas ecuaciones las denominaremos ecuaciones diferenciales funcionales abstractas con retardo, lo que abreviaremos por ARFDE. Una presentación bastante completa de la teoría para el caso semi-lineal, incluyendo numerosos ejemplos, se encuentra en el reciente libro de Wu ([28]).

En particular, comparando con el concepto de solución débil del problema de Cauchy abstracto estudiado en la sección 3 una función $x = x(\cdot, \varphi)$ se llama solución débil del problema homogéneo

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t), \quad t \geq 0 \tag{7.2}$$

$$x_0 = \varphi \tag{7.3}$$

si $x : [0, \infty) \to X$ es continua, $x(\theta) = \varphi(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, y se verifica la siguiente ecuación integral

$$x(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)L(x_s)\, ds, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Para cada $\varphi \in C$ existe una única solución débil de (7.2)-(7.3). El operador de solución $V(t)$ definido por

$$V(t)\varphi = x_t(\cdot, \varphi)$$

es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en C. Representaremos por A_V su generador infinitesimal.

En esta sección mostraremos que los resultados básicos relativos al comportamiento asintótico de $V(t)$ estudiados en la sección 5 para RFDE se mantienen, con hipótesis apropiadas, para ARFDE.

Para establecer nuestros resultados es conveniente introducir algunas notaciones. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ denotaremos por $L_\lambda : X \to X$ y $\Delta(\lambda) : D(A) \to X$ a los operadores lineales definidos por

$$\begin{aligned} L_\lambda x &:= L(e^{\lambda\theta}x), \quad x \in X, \\ \Delta(\lambda)x &:= \lambda x - Ax - L_\lambda x, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

En el siguiente resultado reunimos las principales propiedades espectrales de A_V.

Teorema 7.1 *Si $T(\cdot)$ es un semigrupo compacto entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El operador A_V se define por $A_V\varphi := \varphi'$ en el dominio*

$$D(A_V) = \{\varphi \in C : \varphi' \in C, \ \ \varphi(0) \in D(A), \ \ \varphi'(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)\}.$$

(b) *El operador $V(t)$ es compacto para todo $t > r$.*

(c) *El operador $\Delta(\lambda)$ es cerrado y $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para $Re(\lambda)$ suficientemente grande y si $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ entonces es compacto.*

(d) *Para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \rho(A + L_\lambda)$ si, y solamente si, $\lambda \in \rho(A_V)$.*

(e) *El espectro de A_V coincide con el espectro puntual de A_V. Además, $\lambda \in \sigma(A_V)$ si, y solamente si, existe $0 \neq x \in D(A)$ tal que*

$$\Delta(\lambda)x = 0.$$

(f) *Si $\lambda \in \sigma(A_V)$, entonces el espacio de vectores propios generalizados de A_V con respecto a λ, es decir,*

$$M_\lambda(A_V) := \cup_{i=1}^{\infty} Ker(\lambda I - A_V)^i$$

tiene dimensión finita, el ascendente de $\lambda I - A_V$ es finito ($= k$) y

$$C = Ker(\lambda I - A_V)^k \oplus \mathcal{R}(\lambda I - A_V)^k.$$

(g) *Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\lambda \in \sigma(A_V) : Re(\lambda) \geq \gamma\}$ es finito.*

Demostración. Para demostrar la afirmación (a), consideremos inicialmente $\varphi \in D(A_V)$ y sea $x(t)$ la función definida por $x(t) = \varphi(t)$, $-r \leq t \leq 0$, y $x(t) = x(t, \varphi)$, para $t \geq 0$. Por la definición de dominio del generador infinitesimal de un semigrupo sabemos que

$$A_V\varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{V(t)\varphi - \varphi}{t} = \psi \in C$$

donde el límite indicado existe en la norma de C. Se deduce de esto que

$$A_V\varphi(\theta) = \lim_{t\to 0^+} \frac{V(t)\varphi(\theta) - \varphi(\theta)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{x(t+\theta) - x(\theta)}{t} = x'_R(\theta) = \psi(\theta)$$

donde x'_R denota la derivada por la derecha de x. Se concluye de esta igualdad que x'_R es continua, lo que implica que φ es de clase C^1 y que $A_V\varphi = \varphi'$. Además, para $\theta = 0$ y de la definición de solución débil, se obtiene

$$\frac{x(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{T(t)\varphi(0) - \varphi(0)}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t T(t-s)L(x_s)\,ds$$

y como el segundo término del segundo miembro converge a $L(\varphi)$ cuando $t \to 0^+$ entonces tomando límite en la igualdad anterior cuando $t \to 0^+$ obtenemos que $\varphi(0) \in D(A)$ y que $\varphi'(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)$. Recíprocamente, si φ es una función de clase C^1 tal que $\varphi(0) \in D(A)$ y $\varphi'(0) = A\varphi(0) + L(\varphi)$ de las igualdades anteriores se obtiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{x(t+\theta) - x(\theta)}{t} = \varphi'(\theta)$$

y como φ' es continua, la convergencia anterior es uniforme en $[-r, 0]$ lo cual muestra que $\varphi \in D(A_V)$.

Para mostrar (b), debemos verificar que el conjunto $\{V(t)\varphi : \|\varphi\| \leq 1\}$ es relativamente compacto en C, para $t > r$. Utilizando la definición de solución débil podemos escribir que

$$V(t)\varphi(\theta) = x(t+\theta, \varphi) = T(t+\theta)\varphi(0) + \int_0^{t+\theta} T(t+\theta-s)L(V(s)\varphi)\,ds,$$

para $-r \leq \theta \leq 0$. Como $t+\theta > 0$, de la igualdad anterior se obtiene fácilmente que el conjunto $\{V(t)\varphi(\theta) : \|\varphi\| \leq 1\}$ es relativamente compacto en X y que las funciones $V(t)\varphi$ son equicontinuas, por lo que la compacidad del operador $V(t)$ es consecuencia del teorema de Ascoli-Arzelá.

Para demostrar (c), observemos previamente que si $Re(\lambda) \geq 0$ entonces

$$\|L_\lambda\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L_\lambda x\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\ \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \|L(e^{\lambda\theta}x)\| \leq \|L\|.$$

Como A es cerrado, es inmediato que $\Delta(\lambda)$ también es cerrado. Además, de la Proposición 3.2(c) se deduce que $\lambda \in \rho(A)$ para $Re(\lambda)$ grande y que $\|R(\lambda, A)\| \to 0$, cuando $Re(\lambda) \to \infty$. Por lo tanto, podemos suponer que

$$\|R(\lambda, A)L_\lambda\| \leq \|R(\lambda, A)\|\|L_\lambda\| < 1$$

y de

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - A - L_\lambda = (\lambda I - A)\left[I - R(\lambda, A)L_\lambda\right]$$

obtenemos que $\Delta(\lambda)$ tiene inversa en $\mathcal{L}(X)$ y que

$$\Delta(\lambda)^{-1} = [I - R(\lambda, A)L_\lambda]^{-1} R(\lambda, A).$$

Esta fórmula y la Proposición 3.6 muestran que $\Delta(\lambda)^{-1}$ es compacto para $Re(\lambda)$ grande. Por otra parte, si $\mu \in \mathbb{C}$ es cualquier número tal que $\Delta(\mu)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y escogemos $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\lambda)$ suficientemente grande, podemos establecer

$$\Delta(\mu)^{-1} - \Delta(\lambda)^{-1} = \Delta(\mu)^{-1} (\lambda - \mu - L_\lambda + L_\mu) \Delta(\lambda)^{-1}$$

lo que muestra que $\Delta(\mu)^{-1}$ también es compacto.

La condición (d) caracteriza $\rho(A_V)$. Por definición, $\lambda \in \rho(A_V)$ si, y solamente si, para cada $\psi \in C$ existe un único $\varphi \in D(A_V)$ tal que

$$(\lambda I - A_V)\varphi = \psi.$$

Utilizando la definición del operador A_V establecida en (a), es fácil verificar que la igualdad anterior se mantiene si, y solamente si, existe un único $x \in D(A)$ tal que

$$\lambda x - Ax - L_\lambda x = \psi(0).$$

Es decir, $\lambda \in \rho(A_V)$ si, y solamente si, $\Delta(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Para mostrar (e) observamos que, por lo establecido en (d), si $\lambda \in \sigma(A_V)$ entonces $\lambda \in \sigma(A + L_\lambda)$. Como A es un operador con resolvente compacta, escogiendo $\mu \in \mathbb{C}$ con $Re(\mu)$ suficientemente grande, de la relación

$$(\mu I - A - L_\lambda)^{-1} = [I - R(\mu, A)L_\lambda]^{-1} R(\mu, A)$$

se deduce que $A + L_\lambda$ también es un operador con resolvente compacta. Por lo tanto $\lambda \in \sigma_p(A+L_\lambda)$. Por otra parte, $\lambda \in \sigma_p(A+L_\lambda)$ si, y solamente si, existe $0 \neq x \in D(A)$ tal que $Ax + L_\lambda x = \lambda x$, lo cual es equivalente a $\Delta(\lambda)x = 0$. Además, si definimos $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}x$ es fácil comprobar aplicando la caracterización establecida en (a) que $\varphi \in D(A_V)$ y que $A_V\varphi = \lambda\varphi$ si, y solamente si, $x = \varphi(0)$ satisface la condición $\Delta(\lambda)x = 0$.

Finalmente, las afirmaciones (f) y (g) son consecuencia directa de la propiedad (b), del Teorema B-IV,2.1 en Nagel [20] y del Teorema 5.8-A en Taylor [25]. ■

Se deduce de este resultado que, al menos cuando T es compacto, el sistema (7.2) también satisface las condiciones SDGA y SDA. Esto permite, procediendo de manera similar a lo efectuado por Pandolfi [21], estudiar la estabilizabilidad de un sistema de control modelado por una ARFDE del tipo

$$x'(t) = Ax(t) + L(x_t) + Bu(t).$$

El lector interesado puede consultar Henríquez [14].

Referencias

[1] **Arendt, W.**, *Spectrum and Growth of Positive Semigroups*. Lect. Notes in Pure and Applied Maths. **168**, Marcel Dekker, New York, 1995.

[2] **Balakrishnan, A. V.**, *Strong Stabilizability and the Steady State Riccati Equation*. Appl. Math. and Optim. **8** (1981), 335-345.

[3] **Batty, C. y Phóng, V. Q.**, *Stability of Strongly Continuous Representations of Abelian Semigroups*. Math. Z. 209 (1992), 75-88.

[4] **Benchimol, C. D.**, *Feedback Stabilizability in Hilbert Spaces*. Appl. Math. and Optim. **4** (3) (1978), 225-245.

[5] **Clement, Ph., Heijmans, H. et al.**, *One-Parameter Semigroups*. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[6] **Curtain, R. y Pritchard, A. J.**, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*. Lect. Notes in Control and Inf. Sciences, Vol. 8, Springer-Verlag, 1978.

[7] **Datko, R.**, *Uniform Asymptotic Stability of Evolutionary Processes in a Banach Space*. SIAM J. Math. Anal. **3** (3) (1972), 428-445.

[8] **Fattorini, H. O.**, *Some Remarks on Complete Controllability.*, SIAM J. Control. **4** (4) (1966), 686-694.

[9] **Gibson, J. S.**, *A Note on Stabilization of Infinite Dimensional Linear Oscillators by Compact Linear Feedback*. SIAM J. Control and Opt. **18** (3) (1980), 311-316.

[10] **Hale, J.**, *Functional Differential Equations.*, Springer-Verlag, 1977.

[11] **Hale, J. K. y Lunel S. M.**, *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] **Henríquez, H.**, *Compensadores para Sistemas Distribuidos con Retardo en la Salida*. Tesis. Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Santiago. 1993.

[13] **Henríquez, H.**, *On Non-exact Controllable Systems*. International J. Control **42** (1) (1985), 71-83.

[14] **Henríquez, H.**, *Stabilization of Hereditary Distributed Control Systems*. Preprint.

[15] **Hirsch, M. W. y Smale, S.**, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

[16] **Kalecki, M.**, *A Macrodynamic Theory of Business Cycles*. Econometrica. **3** (1935), 327-344.

[17] **Kato, T.**, *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, New York, 1966.

[18] **Levan, N. y Rigby, L.**, *Strong Stabilizability of Linear Contractive Control Systems on Hilbert Space*. SIAM J. Control and Opt. **17** (1) (1979), 23-35.

[19] **Levan, N.**, *Controllability, *-Controllability and Stabilizability of Contraction Semigroups*. J. Diff. Equations. (1980), 61-79.

[20] **Nagel, R.**, *One Parameter Semigroups of Positive Operators, (Editor)*, Lect. Notes in Maths. **1184**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[21] **Pandolfi, L.**, *Feedback Stabilization of Functional Differential Equations.*, Boll. Un. Mat. Ital., **12**, 626-635.

[22] **Pazy, A.**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations.*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] **Pritchard, A. J. y Zabczyk, J.**, *Stability and Stabilizability of Infinite Dimensional Systems.* SIAM Review **23** (1) (1981), 25-52.

[24] **Schumacher, J. M.**, *Dynamical feedback in Finite and Infinite Dimensional Systems.*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

[25] **Taylor, A. E.**, *Introduction to Functional Analysis.*, John Wiley and Sons, New York, 1958.

[26] **Triggiani, R.**, *On the Stabilizability Problem in Banach Space.* J. Math. Anal. Appl. **52** (1975), 383-403.

[27] **Wonham, W. M.**, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[28] **Wu, J.**, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations.*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[29] **Zabczyk, J.**, *A Note on C_0-Semigroups.* Bull. Acad. Pol. Sci. **XXIII** (1975), 895-898.