Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

Formulación Variacional de Problemas de Valores de Contorno

Ana Calfiqueo Santibáñez

Departamento de Matemáticas y Estadística.
Universidad de la Frontera.
Casilla 54-D .
Temuco Chile.

INTRODUCCION

En la modelación de numerosos fenómenos físicos que tienen aplicaciones en Ingeniería , las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP), lineales y no lineales , constituyen una herramienta matemática muy útil, que permite la descripción de los fenómenos y el estudio de los problemas relacionados.

La teoría asociada a las EDP es bastante compleja , y su desarrollo ha dado lugar a importantes aplicaciones . Este trabajo tiene como objetivo mostrar algunas de estas aplicaciones considerando un problema elíptico con valores en la frontera de gran importancia en Mecánica de Sólidos : el Sistema de Elasticidad. Este problema consiste en un conjunto de ecuaciones que describen los pequeños desplazamientos de un sólido elástico debido a las deformaciones, contracciones y fuerzas aplicadas. La Teoría de la Elasticidad se ha dedicado a estudiar este tipo de fenómenos, relativos a la mecánica de cuerpos sólidos, y se fundamenta en las ecuaciones establecidas por Cauchy y Poisson en la década de 1820 [3]. El lector para profundizar en detalles técnicos puede consultar [1].

Conocido el problema, se entregan algunos resultados sobre Espacios de Sobolev y sus propiedades aplicadas a la Formulación Variacional , lo cual nos permite plantear un esquema de solución débil o generalizada. Se estudia la existencia , unicidad y en algunos casos la caracterización de este tipo de solución en espacios funcionales adecuados . Además se entregan algunas propiedades de aproximación de soluciones, basadas en el Método de Galerkin.

1 Motivación: El Sistema de Elasticidad

Sea Ω un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$, de frontera Γ, C^1 por partes ; Γ_0 una parte de Γ con medida superficial estrictamente positiva y Γ_1 el complemento de Γ_0 en Γ.

Consideremos un sólido elástico homogéneo e isótropo, que se encuentra sometido a una densidad volúmica de fuerzas $\overrightarrow{f}$ en Ω y a una densidad superficial de fuerzas $\overrightarrow{g}$ sobre Γ_1. Denotamos por $\overrightarrow{u}$ los desplazamientos del sólido, los cuales son fijos y nulos sobre Γ_0 (ver Figura 1.1).

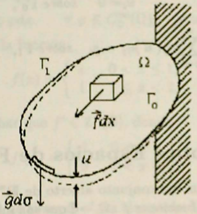

Figura 1.1

Suponiendo desplazamientos pequeños y aplicando la Ley de Hooke, obtenemos la ecuación constitutiva

$$\sigma_{ij}(\overrightarrow{u})= \lambda(\nabla \bullet \overrightarrow{u})\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{u}) \ , \quad 1 \leq i,j \leq n \ ; \tag{1.1}$$

donde $\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{u})$ denota el *tensor de deformaciones* definido como

$$\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{u})= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i \ , \mathrm{j}\leq n \ ; \tag{1.2}$$

y $\sigma_{ij}(\overrightarrow{u})$ denota el *tensor de esfuerzos*. En (1.1) λ y μ son constantes llamadas *constantes de Lamé* , que verifican $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$.

En virtud de la *segunda ley de Newton*, se tiene la ecuación de equilibrio

$$\nabla \bullet \sigma_{ij}(\overrightarrow{u}) + f_i = 0 \quad en\ \Omega. \tag{1.3}$$

Y en la frontera

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad en\ \Gamma_0 \tag{1.4}$$

$$\sigma \bullet \overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{g} \quad en\ \Gamma_1 \tag{1.5}$$

donde $\overrightarrow{\eta}$ es el vector normal a Γ_1 , dirigido hacia el exterior de Ω.

Así, obtenemos el siguiente problema de valores de contorno: Dadas las funciones $\overrightarrow{f}=(f_1, \ldots, f_n)$ de $(L^2(\Omega))^n$ y $\overrightarrow{g}=(g_1, \ldots, g_n)$ de $(L^2(\Gamma_1))^n$, *hallar una función* $\overrightarrow{u}=(u_1, \ldots, u_n)$ solución de

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\overrightarrow{u}) + f_i = 0 \quad en\ \Omega, \tag{1.6}$$

$$u_i = 0 \quad sobre\ \Gamma_0\ , \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(\overrightarrow{u})\eta_j = g_i \quad sobre\ \Gamma_1, \tag{1.8}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

2 Resultados sobre Espacios de Funciones

Definición 2.1 Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o $\mathcal{D}(\Omega)$ el espacio de todas las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente diferenciables en Ω y que tienen soporte compacto en Ω . A menos que se haga explícito, se considerará $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1 Consideremos la función $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|x-a|^2 - r^2}\right\} & si\ |x-a| < r, \\ 0 & si\ |x-a| \geq r, \end{cases}$$

donde $|y| = (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{\frac{1}{2}}$, es la norma euclideana de y en $\mathbb{R}^n$.

Notación Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$ es un multi-índice,

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{donde } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Definición 2.2 (Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$). Sea $(\varphi_n)_n$ una sucesión de $C_0^\infty(\Omega)$, se dice que $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $C_0^\infty(\Omega)$ si (i) el soporte de φ_n está contenido en un compacto fijo K de Ω ; (ii) $\partial^\alpha\varphi_n \longrightarrow 0$ uniformemente sobre K, cuando $n \longrightarrow \infty$ y $\alpha \in N^n$.

Definición 2.3 Se define el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de las distribuciones sobre Ω como el espacio dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, el espacio de las formas lineales contínuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. La continuidad se define como dada $\varphi_n \longrightarrow 0$ en $C_0^\infty(\Omega)$ entonces, $\mu(\varphi_n) \longrightarrow 0$ en $\mathbb{C}$, con $\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definición 2.4 Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^2(\Omega)$ el espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre Ω relativa a la medida de Lebesgue $dx = dx_1...dx_n$ en $\mathbb{R}^n$.

Se puede mostrar que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar:

$$< f \, , \, g >_2 = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx.$$

La norma correspondiente $\|f\|_2^2 = < f, \, f >_2 = \int_\Omega \mid f(x) \mid^2 dx$.

Definición 2.5 Dada $f \in L^2(\Omega)$, se dice que $\partial_i f \in L^2(\Omega)$ en el sentido distribucional, si existe $g \in L^2(\Omega)$ tal que

$$- \int_\Omega f\, \partial_i \varphi dx = \int_\Omega g\, \varphi dx \qquad \forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \text{y se escribe } \partial_i f := g.$$

Ejemplo 2.2 Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 < x \leq 1, \\ 1 & , 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

con $\Omega = (0, 2)$. Es fácil probar que $f' \in L^2(\Omega)$, donde

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < 1, \\ 0 & , 1 < x < 2. \end{cases}$$

En general , dada $v \in L^2(\Omega)$ no siempre v', en el sentido distribucional, está en $L^2(\Omega)$, lo cual nos lleva a introducir el espacio de Sobolev,

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \, v' \in L^2(\Omega)\}, \tag{2.1}$$

dotado del producto escalar

$$< u \, , \, v >_1 = \int_\Omega [uv + < \nabla u, \nabla v >] dx \tag{2.2}$$

y la norma asociada

$$\|v\|_1^2 = < v \, , \, v >_1 \tag{2.3}$$

A continuación se da la propiedad fundamental del espacio $H^1(\Omega)$ que motiva su introducción.

Teorema 2.1 El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar (2.2).

Demostración. Sea (v_m) una sucesión de Cauchy en $H^1(\Omega)$, entonces (v_m) y $(\frac{\partial v_m}{\partial x_i})$, $1 \leq i \leq n$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$. Como el espacio $L^2(\Omega)$ es completo, existen dos funciones v y v_i ,$1 \leq i \leq n$, tales que

$$v_m \to v \quad \text{en } L^2(\Omega)\,, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to v_i \quad \text{en } L^2(\Omega)\,,\ 1 \leq i \leq n. \tag{2.5}$$

Podemos verificar que $v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ en el sentido de las distribuciones sobre Ω. En efecto, por la continuidad de la inyección canónica de $L^2(\Omega)$ en $D'(\Omega)$, se deduce de (2.4) y (2.5)

$$v_m \to v \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to v_i \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)\,,\ 1 \leq i \leq n. \tag{2.7}$$

Aplicando la continuidad de la derivación de $\mathcal{D}'(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, (2.6) implica

$$\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),\ 1 \leq i \leq n, \tag{2.8}$$

y en virtud de la unicidad del límite en $\mathcal{D}'(\Omega)$, se concluye de (2.7) y (2.8)

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

Así, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ es una función de $L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, y por tanto v pertenece a $H^1(\Omega)$. Luego v_m tiende a v en $H^1(\Omega)$ y queda mostrado así que $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. ■

Teorema 2.2 El espacio $H^1(\Omega)$ es separable, es decir, existe un conjunto enumerable denso en $H^1(\Omega)$.

Demostración. Consideramos dos resultados generales: el producto de dos espacios separables es separable; si E es un espacio métrico y si F es un subconjunto cerrado de E, entonces separabilidad de E implica la de F. En efecto, si (e_m) es una sucesión densa en E, la sucesión (f_m) , con f_m proyección de e_m sobre F, es densa en F.

Se introduce el espacio $(L^2(\Omega))^{n+1}$ dotado de la estructura natural de espacio de Hilbert, y se define la aplicación

$$J\colon\ v \longmapsto \left[v\,,\frac{\partial v}{\partial x_1},\,\dots\,,\frac{\partial v}{\partial x_n}\right]$$

de $H^1(\Omega)$ en $(L^2(\Omega))^{n+1}$.

La aplicación J es isométrica:

$$\|Jv\|_2 = \|v\|_1$$

de donde $H^1(\Omega)$ se identifica con el subespacio cerrado $J(H^1(\Omega))$ de $(L^2(\Omega))^{n+1}$. Como $(L^2(\Omega))^{n+1}$ es separable se deduce que $J(H^1(\Omega))$ es separable, concluyendo así el resultado. ■

Como una generalización del espacio $H^1(\Omega)$ se define el Espacio de Sobolev de orden m sobre Ω:

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega),\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ |\ \alpha\ |\leq m\},$$

dotado del producto escalar

$$< u\,,\, v >_m = \int_\Omega \left\{\sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v\right\} dx \tag{2.9}$$

y su norma correspondiente

$$\|v\|_m^2 = < v\,,\, v >_m.$$

Al igual que para $H^1(\Omega)$, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3 El espacio $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable con el producto interno (2.9).

Definición 2.6 Se denota por $H_0^1(\Omega)$ la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. En el caso particular de $\Omega = \mathbb{R}^n$, el espacio $\mathcal{D}(\ \mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.7 Se denota por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables y de soporte compacto en $\overline{\Omega}$. Esto significa que una función pertenece a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si es la restricción en Ω de una función de $\mathcal{D}(\vartheta)$, donde ϑ es un abierto de R^n que contiene a $\overline{\Omega}$.

Finalizamos esta sección dando algunos resultados clásicos que serán utilizados posteriomente, entre estos la desigualdad de Poincaré y las identidades de Green, que nos ayudarán a deducir la formulaciones variacionales respectivas y sus propiedades.

Teorema 2.4 *(Teorema de la Traza).* Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ, C^1 por partes. Entonces $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y la aplicación $\gamma_0 : v \longmapsto \gamma_0 v = v\,|_\Gamma$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $C^0(\Gamma)$ se prolonga por continuidad en una aplicación lineal contínua de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$ que se denota γ_0.

La aplicación γ_0 así definida es llamada *aplicación Traza* y su valor $\gamma_0 v$ para una función v de $H^1(\Omega)$ se denomina *Traza de v sobre* Γ.

Demostración. El lector puede consultar [4]. ■

Como consecuencia del Teorema de Traza , damos la siguiente caracterización del subespacio $H_0^1(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$.

Teorema 2.5 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ, C^1 por partes. Entonces $H_0^1(\Omega)$ es el *núcleo de* γ_0, aplicación traza de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$, es decir,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega);\ v\,|_\Gamma = 0\}\,.$$

Teorema 2.6 Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ, C^1 por partes. Entonces la inyección canónica de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta, es decir, todo conjunto acotado de $H^1(\Omega)$ es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$.

Demostración. El lector puede consultar [4]. ■

Este resultado de compacidad nos dice que dada una sucesión acotada de funciones en $H^1(\Omega)$, es posible extraer una subsucesión convergente en $L^2(\Omega)$.

Teorema 2.7 *(Desigualdad de Poincaré).* Si Ω es acotado, existe una constante $C = C(\Omega) > 0$ tal que

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ \|v\|_2 \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \|\tfrac{\partial v}{\partial x_i}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. Consideremos la función $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ y su prolongación $\tilde{v}$ a cero fuera de Ω. Se puede mostrar que $\tilde{v}$ es una función de $H^1(\mathbb{R}^n)$. Como Ω es acotado podemos suponer que está contenido en la banda $a \leq x_n \leq b$. Hacemos

$$x = (x', x_n)\ ,\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

y así podemos escribir

$$\tilde{v}(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)dt.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos,

$$|\,\tilde{v}(x', x_n)\,|^2 \leq (x_n - a)\int_a^{x_n} |\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)\,|^2\, dt \leq (x_n - a)\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}(x', t)\,|^2\, dt.$$

Así

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\,\tilde{v}\,(x', x_n)\,|^2\, dx' \leq (x_n - a)\int_{\mathbb{R}^n} |\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\,|^2\, dx$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\,\tilde{v}\,|^2\, dx = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\,\tilde{v}(x', x_n)\,|^2\, dx'\right) dx_n \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n}\,|^2\, dx.$$

Obtenemos así la desigualdad

$$\|v\|_2^2 \leq \tfrac{1}{2}(b-a)^2\, \|\tfrac{\partial v}{\partial x_n}\|_2^2 \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

y por densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, se obtiene la misma desigualdad para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. ■

Corolario 2.1 Si Ω es acotado, la seminorma

$$|\,v\,|_1 = \left(\sum_{i=1}^n \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma sobre $H_0^1(\Omega)$ *equivalente* a la norma inducida por $\|\cdot\|_1$.

Teorema 2.8 *(Fórmula de Green).* Sea Ω un abierto acotado de frontera Γ, C^1 por partes. Entonces, si u y v son dos funciones de $H^1(\Omega)$, se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u\, v\, \eta_i\, d\sigma\,,\ 1 \leq i \leq n, \tag{2.10}$$

donde η_i es el n-ésimo coseno director de la normal η a Γ dirigida hacia el exterior de Ω.

Demostración. Si u (respec. v) pertenece a $H^1(\Omega)$, aplicando la primera parte del teorema 2.4, existe una sucesión (u_m) (respec. (v_p)) de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ que converge a u en $H^1(\Omega)$, (respec. a v en $H^1(\Omega)$). Para las funciones u_m y v_p de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se tiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p\,dx = -\int_\Omega u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma u_m\, v_p\, \eta_i\, d\sigma\,,\ 1 \leq i \leq n,$$

y de aplicar la segunda parte del Teorema 2.4, en el límite se obtiene (2.10). ■

Teorema 2.9 Dado un abierto Ω, acotado y de frontera Γ, C^1 por partes, la aplicación $v \longmapsto \vec{\gamma} v = (\gamma_0 v\,,\, \gamma_1 v) = \left[v\mid_\Gamma,\ \frac{\partial v}{\partial \eta}\mid_\Gamma\right]$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$ se prolonga en una aplicación lineal contínua de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)\times L^2(\Gamma)$.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.4 se puede definir la traza $\gamma_0 v = v\mid_\Gamma$ de $v \in H^2(\Omega)$. Como $\frac{\partial v}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$, es una función de $H^1(\Omega)$, también se puede definir la traza $\gamma_0\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\mid_\Gamma$ y $\frac{\partial v}{\partial x_i}\mid_\Gamma$ está en $L^2(\Gamma)$. Luego la función $\eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\mid_\Gamma$ está definida en $L^2(\Gamma)$, como producto de una función de $L^\infty(\Gamma)$ por una función de $L^2(\Gamma)$, de manera que la derivada normal

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}\mid_\Gamma = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\mid_\Gamma$$

está definida como una función de $L^2(\Gamma)$. Queda así demostrado el teorema. ■

Como consecuencia de los teoremas 2.8 y 2.9 se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2 Suponga que Ω es un abierto acotado con frontera Γ, C^1por partes. Para toda función $u \in H^2(\Omega)$ y toda función $v \in H^1(\Omega)$, se tiene la fórmula de Green

$$-\int_\Omega (\Delta u)\, v\, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\sigma. \tag{2.11}$$

3 Formulación Variacional

Con el fin de ilustrar las propiedades de la Formulación Variacional consideraremos el problema de Dirichlet :

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera Γ, C^1 por partes. *Dada una función* $f \in L^2(\Omega)$, *hallar una función* u *definida en* Ω *y solución de*

$$-\Delta u = f \quad en\,\Omega, \tag{3.1}$$

$$u = 0 \quad sobre\,\Gamma. \tag{3.2}$$

Suponemos que la solución u del problema (3.1)-(3.2) es lo suficientemente regular, por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$. Multiplicamos ambos lados de la ecuación (3.1) por una *función test* $v \in H_0^1(\Omega)$ e integramos sobre Ω, obteniendo

$$-\int_\Omega (\Delta u)\, v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx.$$

Utilizando la fórmula de Green (2.11) y teniendo en cuenta que $v\,|_\Gamma = 0$ tenemos,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\, v\, dx,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

Además por (3.2) y por el Teorema 2.5 , concluimos que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Luego, nuestro problema se transforma en: *dada una función* $f \in L^2(\Omega)$, *hallar una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *que verifique* (3.3). Esta nueva forma de plantear el problema corresponde a la *formulación variacional* de (3.1)-(3.2).

Observamos que toda solución u suficientemente regular de (3.1)-(3.2), es solución del problema variacional. Recíprocamente, una solución u de $H_0^1(\Omega)$ es solución de (3.3) sí y solamente sí

$$\forall\, \varphi \in D(\Omega),\ \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\, \varphi\, dx,$$

ya que por definición $H_0^1(\Omega)$ es la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Podemos decir entonces que si u verifica (3.3), la expresión (3.1) se verifica en el sentido de las distribuciones sobre Ω. Finalmente como $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene (3.2) en el sentido del Teorema de Traza sobre Γ.

3.1 Existencia y unicidad de solución

Nos abocaremos ahora a estudiar la existencia y unicidad de solución para un *Problema Variacional abstracto, y* para tal efecto nos ubicamos en un marco general, considerando

(a) un espacio de Hilbert V (sobre $\mathbb{R}$) de norma $\|\cdot\|$;
(b) una forma bilineal $(u\,,\,v) \longmapsto a(u\,,\,v)$ contínua sobre $V \times V$,es decir, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\forall\, u \in V,\, \forall\, v \in V, \quad a(u\,,\,v) \leq M\|u\|\|v\|;$$

(c) una forma lineal $v \longmapsto L(v)$ contínua sobre V , es decir, un elemento L del dual (topológico) V' de V que está dotado de la norma dual

$$\|L\| = sup_{v\neq 0} \frac{|\,L(v)\,|}{\|v\|}.$$

Luego, podemos considerar el problema variacional general, que a partir de ahora llamaremos problema (P): *hallar* $u \in V$ *tal que*

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v).$$

Antes de enunciar el Teorema de existencia y unicidad de solución para el problema (P), mostramos algunos resultados que serán utilizados en su demostración.

Definición 3.1.1 Dado un subconjunto S de un espacio de Hilbert $(V, <\cdot, \cdot>_V)$, se define el ortogonal de S, y se denota $S^\perp$, como

$$S^\perp := \{x \in V : < x, v >_V = 0 \quad \forall v \in S\}.$$

Teorema 3.1.1 (*Teorema de Descomposición Ortogonal*). Sea $U \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de un Hilbert V. Entonces para cada $x \in V$ existe $v \in U$ y $w \in U^\perp$ tal que $x = v + w$. Esta descomposición es única.

Corolario 3.1.1 Sea $U \neq \{0\}$ un subespacio cerrado de un Hilbert V. Entonces existe $\bar{y} \in V$, $\bar{y} \neq 0$, tal que $\bar{y} \in U^\perp$.

Teorema 3.1.2 *(Teorema de Representación de Riesz)*. Sea $(V, < \cdot, \cdot >_V)$ un espacio de Hilbert. Entonces, para cada $L \in V'$ existe un único $y \in V$ tal que

$$L(v) = < y, v >_V \qquad \forall v \in V, \tag{3.1.1}$$

y además

$$\|L\|_{V'} = \|y\|_V. \tag{3.1.2}$$

Demostración. El lector puede consultar [2]. ■

En virtud del teorema anterior podemos introducir la siguiente aplicación , llamada *aplicación de representación de Riesz*,

$$\begin{aligned} \Re : V' &\to V \\ L &\to \Re L, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

donde $\Re L$ es el único elemento de V tal que

$$L(v) = < \Re L, v >_V \qquad \forall v \in V.$$

El operador así definido es un isomorfismo isométrico puesto que es lineal, biyectivo y además $\|\Re L\|_V = \|L\|_{V'}$ para todo $L \in V'$. Luego, estas propiedades de $\Re$ constituyen una forma equivalente de enunciar el Teorema de Representación de Riesz.

Definición 3.1.2 La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ se dice *V-elíptica o coerciva,* si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

Teorema 3.1.3 *(Lema de Lax-Milgram)*. Sea $(V, < \cdot, \cdot >_V)$ un Hilbert y sea $a : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal acotada y V-elíptica. Entonces, para cada $L \in V'$, existe un único $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$, $\forall v \in V$. Además,

$$\|u\|_V \leq \tfrac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}, \tag{3.1.4}$$

donde $\alpha > 0$ es la constante de V-elipticidad de $a(\cdot\,,\,\cdot)$.

Demostración. Dado que $a(\cdot\,,\,\cdot)$ es acotada podemos definir el operador lineal $A : V \to V'$, tal que para cada $v \in V$, $Av \in V'$ se define como

$$Av\,(w) := a\,(v\,,\,w) \quad \forall w \in V.$$

Es claro que A es acotado pues,

$$\|Av\|_{V'} := \sup_{0 \neq w} \frac{|\,a(v,w)\,|}{\|w\|_V} \leq M\|v\|_V\,.$$

Así, $A : V \to V'$ es lineal y acotado, y $\|A\| \leq M$, donde $\|\cdot\|$ denota la norma de A .

Ahora , si $\Re$: $V' \to V$ es la *aplicación de representación de Riesz* definida en (3.1.3), nuestro problema equivale a : *Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$Au(v) =< \Re L, v >_V \quad \forall v \in V.$$

O equivalentemente: *Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$\Re Au = \Re L.$$

Finalmente definiendo el operador lineal $\mathbf{A} := \Re A : V \to V$ ilustrado en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "\mathbf{A}"'] & V' \arrow[d, "\Re"] \\ & V \end{tikzcd}$$

formulamos nuestro problema como : *Hallar* $u \in V$ *tal que*

$$\mathbf{A}\ u = \Re L.$$

De este modo, la demostración del teorema se reduce a probar que $\mathbf{A}$ es un operador biyectivo . Primero notamos que por la V-elipticidad de $a(\cdot\,,\,\cdot)$, se tiene

$$\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) = Av\,(v) \leq \|Av\|_{V'}\|v\|_V\,,$$

esto es

$$\alpha\|v\|_V \leq \|Av\|_{V'} = \|\Re Av\|_V = \|\mathbf{A}v\|_V\,,$$

o bien

$$\alpha\|v\|_V \leq \|\mathbf{A}v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{3.1.5}$$

A partir de (3.1.5) tenemos que $\mathbf{A}$ es inyectivo. Para mostrar que $\mathbf{A}$ es sobreyectivo, primero probamos que $\mathbf{A}(V)$ es un subespacio cerrado de V, luego que $\mathbf{A}(V)^\perp = \{0\}$ y por último aplicamos el Teorema de Descomposición Ortogonal.

Sea $\{v_n\}_{n\in N} \subseteq V$ tal que $\mathbf{A}(v_n) \to w \in V$ cuando $n \to +\infty$. Usando (3.1.5) se obtiene que

$$\alpha\|v_n - v_m\|_V \leq \|\ \mathbf{A}(v_n) - \mathbf{A}(v_m)\|_V\ ,$$

lo cual indica que $\{v_n\}_{n\in N}$ es de Cauchy en V y por lo tanto converge a un elemento $v \in V$. Por otro lado, por ser $\mathbf{A}$ contínua tenemos que $\mathbf{A}(v_n) \to \mathbf{A}(v)$ cuando $n \to +\infty$, y por la unicidad del límite se concluye que $w = \mathbf{A}(v) \in \mathbf{A}(V)$. Así $\mathbf{A}(V)$ es cerrado.

Sea $v \in \mathbf{A}(V)^{\perp}$, entonces

$$0 = <\mathbf{A}(v), v>_V = Av(v) = a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 ,$$

de donde $v = 0$. Esto prueba que $\mathbf{A}(V)^{\perp} = \{0\}$. Luego, la sobreyectividad de $\mathbf{A}$ resulta de aplicar directamente el Teorema 3.1.1.

Por último, de (3.1.5) se deduce que

$$\alpha \|u\|_V \leq \|\mathbf{A}\, u\|_V = \|\Re L\|_V = \|L\|_{V'},$$

y por lo tanto $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}$. Se completa así la demostración. ■

Observemos ahora que si $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, es decir,

$$\forall u \in V,\ \forall v \in V, \quad a(u\,,v) = a(v\,,u),$$

podemos introducir un funcional cuadrático definido para todo $v \in V$ por

$$J(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - L(v)$$

y en este sentido logramos una caracterización de la solución de nuestro problema (P), al considerar el problema de minimización: *encontrar $u \in V$ tal que*

$$J(u) = min_{v\in V}\, J(v). \tag{3.1.6}$$

Teorema 3.1.4 Suponga que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica y V-*elíptica*. Entonces el problema (3.1.6) admite una solución única $u \in V$, que corresponde a la solución del problema (P).

Demostración. Sea $u \in V$ la solución del problema (P) y sea w un elemento cualquiera de V ; de la simetría de $a(\cdot\,,\cdot)$ tenemos

$$J(u+w) = J(u) + \{a(u\,,w) - L(w)\} + \tfrac{1}{2}a(w\,,w),$$

y como u es solución del problema (P)

$$J(u+w) = J(u) + \{a(u,w) - L(w)\} + \tfrac{1}{2}a(w,w),$$

luego, de aplicar la V-*elipticidad* de $a(\cdot\,,\cdot)$,

$$J(u+w) \geq J(u) + \tfrac{\alpha}{2}\|w\|^2.$$

Se obtiene así, que

$$\forall v \in V, \quad v \neq u \Longrightarrow J(v) > J(u),$$

lo cual completa la demostración. ■

Ejemplo 3.1.1 Volvemos ahora a nuestro problema de Dirichlet (P). Su formulación variacional está dada por la expresión (3.3), donde $V = H_0^1(\Omega)$, con la norma $\|v\| = \|v\|_1$,

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx\,,$$

$$L(v) = \int_\Omega f\, v\, dx.$$

Claramente tanto $a(\cdot\,,\,\cdot)$ como $L(\cdot)$ son contínuas sobre $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente, pues se tiene

$$|a(u\,,\,v)| \leq |\,u\,|_1\,|\,v\,|_1 \leq \|u\|_1 \|v\|_1.$$
$$|\,L(v)\,| \leq \|f\|_2\,\|v\|_2 \,\leq\, \|f\|_2\,\|v\|_1.$$

Además aplicando la *desigualdad de Poincaré* tenemos

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v,v) \geq \frac{1}{1 + [C(\Omega)]^2} \|v\|_1^2.$$

Luego, por *Lema de Lax-Milgram* concluimos que existe una única función $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\, v\, dx.$$

Como $a(\cdot\,,\,\cdot)$ es también simétrica , en virtud del Teorema 3.1.4 podemos caracterizar la solución u de nuestro problema (P) , como siendo aquella función u que minimiza el funcional cuadrático

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\,|^2\, dx - \int_\Omega f\, v\, dx.$$

sobre el espacio $H_0^1(\Omega)$.

4 El Sistema de Elasticidad

En esta sección realizaremos un análisis del problema de nuestra motivación, desde el punto de vista del estudio de existencia y unicidad de solución débil aplicando los resultados de las secciones anteriores.

Consideremos Ω un subconjunto abierto, acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$, de frontera Γ, C^1 por partes ; Γ_0 una parte de Γ con medida superficial estríctamente positiva y Γ_1 el complemento de Γ_0 en Γ.

Se tiene el problema siguiente: Dadas las funciones $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ de $(L^2(\Omega))^n$ y $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ de $(L^2(\Gamma_1))^n$, ***hallar una función*** $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ solución de

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\vec{u}) + f_i = 0 \quad en\ \Omega, \tag{4.1}$$

$$u_i = 0 \quad sobre\ \Gamma_0\ , \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(\vec{u})\eta_j = g_i \quad sobre\ \Gamma_1, \tag{4.3}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, donde

$$\varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \le i\ , j \le n\ ; \tag{4.4}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{u}) = \lambda\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{kk}(\vec{u})\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\vec{u})\ , \quad 1 \le i, j \le n\ ; \tag{4.5}$$

con λ y μ constantes que verifican $\lambda \ge 0$, $\mu > 0$.

Consideremos los espacios $(L^2(\Omega))^n$ y $(H^1(\Omega))^n$ con las normas asociadas

$$\|\vec{v}\|_2 = (\textstyle\sum_{i=0}^{n}\|v_i\|_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\vec{v}\|_1 = (\textstyle\sum_{i=0}^{n}\|v_i\|_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

y definamos el espacio

$$V = \left\{\vec{v} \in (H^1(\Omega))^n : \vec{v} = \vec{0}\ sobre\ \Gamma_0\right\}.$$

Enunciamos a continuación un resultado particular que admitiremos y que nos será útil al momento de verificar las propiedades de nuestro problema variacional.

Teorema 4.1 Sea Ω un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$de frontera Γ, C^1 por partes. Entonces existe una constante $C_0 > 0$ tal que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \sum_{i,j=1}^{n}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_2^2 \ge C_0\|\vec{v}\|_1^2. \tag{4.6}$$

Demostración. El lector puede consultar [4]. ■

Del Teorema anterior, tenemos que la aplicación

$$\vec{v} \to \left(\sum_{i,j=1}^{n}\|\varepsilon_{ij}(\vec{v})\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma sobre V equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$.

Consideremos ahora la siguiente forma bilineal contínua

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})dx$$

o equivalentemente

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \lambda\int_\Omega\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)dx + 2\mu\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \varepsilon_{ij}(\vec{u})\varepsilon_{ij}(\vec{v})dx. \tag{4.7}$$

Por Teorema 4.1 concluimos que $a(\cdot\,,\,\cdot)$ es *V-elíptica* , pues

$$\forall \vec{v} \in V, \quad a(\vec{v}, \vec{v}) \geq 2\mu C_0 \|\vec{v}\|_1^2 .$$

Además por las características de la frontera Γ, la *aplicación traza* $\vec{v}\,|_{\Gamma_1}$es contínua de $(H^1(\Omega))^n$ en $(L^2(\Gamma_1))^n$.

Consideremos el siguiente funcional:

$$L(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, d\sigma \right), \forall \vec{v} \in V.$$

Por lo tanto, aplicando el *Lema de Lax-Milgram*, existe una única función $\vec{u} \in V$, solución de

$$\forall \vec{v} \in V, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, d\sigma \right) . \tag{4.8}$$

Además como la forma bilineal es simétrica (se ve directamente de (4.7)), podemos introducir el funcional cuadrático

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) dx - \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega f_i v_i \, dx + \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, d\sigma \right),$$

que en virtud del Teorema 3.1.4 tiene solución única caracterizada por

$$J(\vec{u}) = min_{\vec{v} \in V} J(\vec{v}).$$

Finalmente nos resta interpretar la formulación débil (4.8). Primero observamos que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \sigma_{ij}(\vec{v}) = \sigma_{ji}(\vec{v}) \, ,$$

de donde

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx. \tag{4.9}$$

Tomando $\vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^n$, de (4.8) y (4.9) concluimos que

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) = f_i , \tag{4.10}$$

en Ω para cada i, en el sentido de las distribuciones. Luego en (4.8) tenemos

$$\forall \vec{v} \in V, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) \right) v_i \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} g_i v_i \, d\sigma. \tag{4.11}$$

Recíprocamente, toda $\vec{u} \in V$ que satisface (4.10) y (4.11) es la solución de (4.8). Por último, formalmente, vía fórmula de Green (Teorema 2.8)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = - \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\vec{u}) \right) v_i dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\vec{u}) v_i \eta_j d\sigma,$$

y la relación (4.11) concluimos, formalmente que

$$\forall \vec{v} \in V, \quad \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(\vec{u}) \eta_j - g_i \right) v_i d\sigma = 0,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(\vec{u}) \eta_j = g_i \qquad \text{sobre } \Gamma_1,\ 1 \leq i \leq n.$$

Por lo tanto se tiene resuelto el problema (4.1)-(4.3).

5 El método de Galerkin

Consideremos un espacio de Hilbert separable V, una forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ acotada y V-*elíptica* , y un funcional acotado $L \in V'$. Por Lema de *Lax-Milgram existe un único* $u \in V$ *tal que*

$$a(u, v) = L(v) \qquad \forall v \in V.$$

Llamaremos (P) esta abstracción.

Nos interesa encontrar un procedimiento de aproximación de solución para el problema (P) y para tal efecto consideramos una sucesión de subespacios de dimensión finita $V_n \in V$, y planteamos los siguientes problemas (P_n): *Hallar* $u_n \in V_n$ *tal que*

$$a(u_n, v_n) = L(v_n) \qquad \forall v_n \in V_n.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la dimensión de V_n es n. Esta idea de reducir el problema original formulado en el espacio de dimensión infinita V, a una sucesión de problemas análogos en los subespacios de dimensión finita V_n, se conoce con el nombre de Método de Galerkin [2]. El objetivo será determinar los V_n que al menos cumplan la siguiente propiedad

$$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_V = 0.$$

Afirmamos que (P_n) se reduce a un sistema lineal de ecuaciones. En efecto, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V_n. Entonces, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j .$$

Luego, (P_n) consiste en : *Hallar* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a(e_j, v_n) = L(v_n) \qquad \forall v_n \in V_n,$$

o equivalentemente: *Hallar* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a(e_j, e_i) = L(e_i) \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}. \tag{5.1}$$

Así usando notación matricial la formulación (5.1) se reescribe como: *Hallar* $\alpha \in \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$A\alpha = L \tag{5.2}$$

donde $A := (a_{ij})_{n \times n}$; $\alpha := (\alpha_j)_{n \times 1}$; $L := (l_j)_{n \times 1}$; $a_{ij} := a(e_j, e_i)$; $l_j := L(e_j)$.
De la *V-elipticidad* de $a(\cdot, \cdot)$, (5.1) tiene solución única. La matríz A es conocida como *matríz de rigidez* y L, el *vector de carga*.

Veamos a continuación un ejemplo específico de un esquema de Galerkin.

Ejemplo 5.1 Consideremos el problema unidimensional (P): *Hallar* u *tal que*

$$-u'' = l \quad en \quad \Omega := (0, 1),$$
$$u(0) = u(1) = 0.$$

La formulación variacional de (P) consiste en hallar $u \in V = H_0^1(\Omega)$ solución de:

$$a(u, v) = \int_\Omega f\, v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $a(u, v) = \int_\Omega u'v'dx$.

Asociamos a este problema un esquema de Galerkin tomando una partición del dominio $\Omega = (0, 1)$, $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ e introduciendo el espacio

$$V_n := \left\{ v \in C(\overline{\Omega}) : v(0) = v(1) = 0 \; y \; v\,|_{[x_{j-1}, x_j]} \in P_1([x_{j-1}, x_j]) \; \forall j = \overline{1, n+1} \right\},$$

donde $P_1(S)$ denota el espacio de polinomios de grado ≤ 1 definidos sobre cualquier subconjunto S de Ω. Se puede probar que las funciones de V_n quedan determinadas únicamente por los valores que toman en los nodos x_j de la partición de Ω. En particular, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ constituye una base de V_n, donde e_i satisface

$$e_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si\; j = i, \\ 0 & si\; j \neq i. \end{cases}$$

El cálculo de la *matriz de rigidez* resulta,

$$a_{ij} := a(e_i, e_j) = \int_0^1 e_i' e_j' dx = \begin{cases} 0 & si\; |\, i - j \,| \geq 2, \\ -\dfrac{1}{h_j} & si\; j = i - 1, \\ \dfrac{1}{h_j} + \dfrac{1}{h_{j+1}} & si\; j = i, \end{cases}$$

donde $h_j := x_j - x_{j-1}\ \forall j = \overline{1, n+1}$, y por lo tanto A resulta tridiagonal. En el caso de una partición uniforme con $h_j = h := \frac{1}{n+1}$, el sistema lineal (5.2) tiene la forma

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & . & 0 \\ 0 & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & . & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ l_{n-1} \\ l_n \end{bmatrix}$$

donde $l_j := L(e_j) = \displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} l\, e_j\, dx$. Por último, debido a la definición del subespacio V_n, la solución $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ que entrega el sistema lineal anterior coincide con los valores que toma la solución de Galerkin u_n en cada uno de los nodos de la partición, es decir, $\alpha_i = u_n(x_i)\ \forall i \in \{1, ..., n\}$.

5.1 Estimación del error

Obtendremos a continuación una cota superior del *error* originado por el método de Galerkin. Este *error* se define como la diferencia en norma entre la solución exacta $u \in V$ de (P) y la solución aproximada $u_n \in V_n$ de (P_n). Primero notamos que de (P) y (P_n) se tiene

$$a(u - u_n\,,\, v_n) = 0 \quad \forall v_n \in V_n \tag{5.1.1}$$

conocida como *relación de ortogonalidad* .

Lema 5.1 *(Lema de Cea).* Suponga que $a(\cdot\,,\,\cdot)$ es una forma bilineal acotada (con constante M) y V-elíptica (con constante α). Sean $u \in V$ y $u_n \in V_n$ las soluciones de (P) y (P_n) , respectivamente. Entonces

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V\,. \tag{5.1.2}$$

Demostración. Usando la V-elipticidad de $a(\cdot\,,\,\cdot)$, sumando y restando un elemento arbitrario $v_n \in V_n$ en el segundo término de $a(\cdot\,,\,\cdot)$ y aplicando la *relación de ortogonalidad*, obtenemos

$$\alpha\|u - u_n\|_V^2 \leq a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v_n + v_n - u_n) = a(u - u_n, u - v_n).$$

Como $a(\cdot\,,\,\cdot)$ es acotada, de la desigualdad anterior se tiene

$$\alpha\|u - u_n\|_V^2 \leq M\|u - u_n\|_V\|u - v_n\|_V\,,$$

y suponiendo $\|u - u_n\|_V \neq 0$, resulta

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|u - v_n\|_V \quad \forall v_n \in V_n, \tag{5.1.3}$$

desigualdad válida también para $\|u - u_n\|_V = 0$. Luego, tomando ínfimo en (5.1.3) con respecto a $v_n \in V_n$ queda demostrado el lema. ∎

La cota de error dada por el Lema anterior es conocida como *estimación de Cea*, y corresponde a la condición mínima requerida en cada caso. Ella garantiza que el error se va a cero a medida que la dimensión del subespacio V_n tiende a ∞.

Consideremos ahora un espacio W que contenga a V. Mostraremos a través de un problema unidimensional , que el error también puede medirse en la norma del espacio W. Obtendremos de esta forma la estimativa conocida como la *Propiedad de Aproximación*.

Denotemos por (P_1) el problema:

$$-u'' = f \qquad en\, \Omega := (0,1) \tag{5.1.4}$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Sea $W := L^2(\Omega)$ y $w \in V := H_0^1(\Omega)$ la solución débil del problema de valores de contorno:

$$-w'' = u - u_n \qquad en\, \Omega := (0,1) \tag{5.1.5}$$

$$w(0) = w(1) = 0$$

Se sigue que

$$A(v,w) = \int_\Omega (u - u_n) v dx \qquad \forall v \in V\,,$$

en particular , para $v := u - u_n$, se obtiene

$$\|u - u_n\|_w^2 = A(u - u_n, w).$$

Ahora, de la relación de ortogonalidad y del acotamiento de A, resulta

$$\|u - u_n\|_W^2 = A(u - u_n, w - v_n) \leq M\|u - u_n\|_V \|w - v_n\|_V \quad \forall v_n \in V_n\,,$$

lo cual implica que

$$\|u - u_n\|_W^2 \leq M\|u - u_n\|_V \inf_{v_n \in V_n} \|w - v_n\|_V\,. \tag{5.1.6}$$

Si definimos el subespacio Z de V dado por aquellas funciones $z \in V$ tales que $z'' \in W$, es razonable suponer que V_n satisface la siguiente *Propiedad de Aproximación:*

$$\inf_{v_n \in V_n} \|z - v_n\|_V \leq \epsilon(n)\,\|z''\|_W \qquad \forall z \in Z\,. \tag{5.1.7}$$

donde $\epsilon(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dado que $w \in Z$ se deduce de (5.1.7) que

$$\inf_{v_n \in V_n} \|w - v_n\|_V \le \epsilon(n) \|w''\|_W = \epsilon(n) \|u - u_n\|_W ,$$

lo que unido a (5.1.6) nos da

$$\|u - u_n\|_W \le M\epsilon(n) \|u - u_n\|_V .$$

Aplicando la *estimación de Cea* (5.1.2) y asumiendo que $u \in Z$, se concluye de (5.1.7) que

$$\|u - u_n\|_V \le \tfrac{M}{\alpha}\epsilon(n) \|u''\|_W ,$$

o bien,

$$\|u - u_n\|_V \le \tfrac{M}{\alpha}\epsilon(n) \|f\|_W ,$$

y en consecuencia,

$$\|u - u_n\|_W \le \tfrac{M^2}{\alpha}\epsilon(n)^2 \|f\|_W .$$

Luego, notamos que $\|u - u_n\|_V$ es de orden $\epsilon(n)$ mientras que $\|u - u_n\|_W$ es de orden $\epsilon(n)^2$, lo cual indica que el error medido en la norma de W converge más rápido a cero cuando $n \to \infty$.

COMENTARIOS

En todo el desarrollo anterior se ha dado una demostración de lo útil que resulta la Formulación Variacional . Hemos visto a través de algunos ejemplos, como esta herramienta permite representar bien los problemas elípticos con valores de contorno, como ocurre en el caso del Sistema de Elasticidad, cuya aplicación es común encontrar en ciertas áreas de la ingeniería. Destacamos lo importante que resulta la propiedad de abstracción de la formulación débil en la deducción de un resultado sobre existencia y unicidad de solución. Concretamente el Lema de Lax-Milgram. A través de este resultado logramos demostrar existencia y unicidad de solución para el problema de Elasticidad en el caso lineal y mas aún logramos caracterizarla .

Queda mencionar la importancia que tiene la formulación Variacional desde el punto de vista de la aproximación de soluciones. Esta permite establecer un esquema de solución débil, que hace aplicable el método de aproximación de soluciones denominado Método de Galerkin, el cual fue ilustrado a través de un ejemplo sencillo. Se dio un resultado importante de acotamiento del error generado mediante este método, conocido como la Estimación de Cea y que reviste gran importancia pues se considera como punto inicial en la derivación de las propiedades de convergencia de los métodos de aproximación denominados Métodos de Elementos Finitos, que corresponden a un caso particular del Método de Galerkin.

Como comentario final indicamos que en la aproximación de soluciones para los problemas variacionales, pensamos en el método de Galerkin , es de gran importancia desarrollar algoritmos eficientes , debido a las características que puede presentar el sistema lineal de ecuaciones asociado a los problemas (P_n) .

References

[1] **Ciarlet P.G**, "Mathematical Elasticity", North-Holland 1988.

[2] **Gatica G.**, "Algunos aspectos básicos del Método de Elementos Finitos" Cubo Vol 1, 1999, 129-162.

[3] **Landau L., Lifshitz E.**, "Teoría de la Elasticidad", Editorial Reverte S.A., 1969.

[4] **Raviart P.A, Thomas J.M.**, "Introduction l'Analyse Numérique des écuations aux Dérivées Partielles", Editorial Masson, Paris, 1983.