Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

Representación visual y aprendizaje en un contexto de software educativo (I).

ROSA MARIA AFONSO GUTIERREZ
&
JOSE ANGEL DORTA DIAZ

Departamento de Análisis Matemático.
Universidad de La Laguna.
Avenida Astrofísico Francisco Sánchez, S. N.
38271. La Laguna. Tenerife.
Islas Canarias. España

Resumen

El objetivo que perseguimos con este trabajo es el de investigar el proceso de enseñanza - aprendizaje de algunos conceptos "elementales" del Análisis Matemático, ubicados en la frontera que existe entre la enseñanza secundaria y la universitaria. En el desarrollo del mismo, adjuntamos un cuestionario que ha sido contestado por profesores de ambos ámbitos de la enseñanza, con reconocida experiencia docente e investigadora. En esta encuesta se ha solicitado información, fundamentalmente, acerca del uso que hacen en sus explicaciones de los aspectos de representación visual.
Pretendemos con ello, hacer énfasis en aquellas ideas, conceptos y métodos matemáticos que presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y/o geométricamente, y cuya utilización resulta provechosa a la hora de asimilarlos y manejarlos por parte de los alumnos.

Además, nos apoyaremos cuando sea necesario en algún software adecuado (MAPLEV) así como en algunos aspectos de programación en BASIC.

Abstract

The objective of this work is to investigate the process of teaching - learning for some elementary concepts of Mathematical Analysis, located at the frontier between secondary education and university education. In the course of the same, we enclose a questionnaire which has been answered by teachers with recognized teaching and investigative experience. In this questionnaire we have, mainly, asked for some information, about the use of the aspects of visual display that they make in their explanations.

We try to put emphasis on those ideas, concepts and mathematical methods that usual show a great wealth of visual contents, and can be represented intuitively and - or geometricaly, and their utilization is advantageous for student's use.

Besides, when it were necessary, we would base on some adequate software (MAPLEV) and in some aspects of programming in BASIC.

1 INTRODUCCIÓN.

Este trabajo constituye parte de una investigación de más amplias miras que realizamos en la Universidad de La Laguna, TENERIFE y en el que se persigue indagar el estado en que se encuentra la enseñanza - aprendizaje y las perspectivas de futuro de algunos temas en los que los tópicos son:

- *el conjunto de los números reales y su completitud,*
- *sucesiones de número reales,*
- *operación paso al límite,*
- *series numéricas, etc.*

ubicados en la frontera que existe entre la enseñanza secundaria y universitaria. Es bien conocida la dificultad que entrañan algunas cuestiones relacionadas con los temas señalados y es por eso que, haciendo uso de la experiencia de profesores cualificados, de entrevistas cualitativas realizadas a alumnos que terminan el Bachillerato y de medios informáticos cada vez más al uso, enfocamos nuestro estudio para que a los alumnos les resulte más asequible y atractivo el progreso en la concepción y manipulación de estas ideas.

En este artículo nos ceñiremos fundamentalmente a analizar aspectos visuales relacionados con la completitud de R, la no completitud de Q, el límite de una sucesión de números reales y algunos teoremas afines, finalizando con la exposición de cuestiones relacionadas con la operación "paso al límite" y su utilización por parte de nuestros alumnos.

Las ideas básicas del Análisis Matemático como "orden", "distancia", "completitud", "sucesión", "paso al límite", "continuidad", etc., presentan una enorme riqueza de contenidos visuales, las cuales pueden representarse intuitivamente con elementos geométricos. Estas representaciones se aprovechan para:

Transmitir ideas o conceptos nuevos (enseñanza)
Manejar y relacionar entre sí nuevas ideas (aprendizaje y/o adaptación al medio)
Resolución de problemas.

Existen en la literatura numerosas definiciones de visualización; nosotros nos quedamos con la definición que Miguel de Guzmán hace sobre ella:

"La visualización es una forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan" (Miguel de Guzmán [10]).

Así pues la visualización, que en su más profundo significado constituye un "proceso interior", que se manifiesta en una acción en la que las personas establecen una relación entre una construcción interna y "algo" a lo que se tiene acceso mediante los sentidos ("algo" = dibujo, construcción externa, diagrama, gráfica,...), será en lo que sigue una herramienta extraordinariamente útil para mejorar en lo posible la transmisión del conocimiento.

"Las tendencias formalistas imperantes durante buena parte del siglo XX, han relegado a segundo término la visualización, tratándola con desconfianza y con sospecha, sin embargo parece que se puede percibir una cierta tendencia hacia la renovación del papel de la visualización en el quehacer matemático, con decisión y seguridad entre quienes se ocupan de la investigación en educación matemática" (Miguel de Guzmán [10]).

Entendemos que Guzmán, al hablar de la visualización en el párrafo anterior, se refiere a la construcción externa (representación gráfica, dibujo o diagrama) de las ideas matemáticas. Por esta razón y con objeto de ser prácticos, nuestro trabajo no persigue hacer una epistemología sobre la visualización; no pretendemos analizar los significados profundos ni las diferentes vertientes que existen sobre la misma, pero sí queremos hacer uso de aquellos aspectos visuales - representativos que sean útiles para el proceso de transmitir conceptos y para el proceso de recibir, asimilar, manejar y relacionarlos entre sí... De igual forma, no haremos juicios de valor sobre "las virtudes de la visualización", ni clasificaremos a los profesores por el uso que hagan de la misma, puesto que como hemos indicado la usaremos como una herramienta, un complemento más para el desarrollo del proceso de enseñanza - aprendizaje.

Sentadas estas bases, y como el propio Miguel de Guzmán afirma en su artículo "Dos aspectos determinantes de la educación matemática del futuro: Incidencias del ordenador; El papel de la visualización":

"La visualización es un proceso de intelección directa y descansada, pero sólo para el que está suficientemente preparado para realizarlo de manera eficaz... La realización de la visualización de modo correcto, de tal manera que sea un proceso verdaderamente provechoso requiere una preparación previa, una educación que no muchos matemáticos son capaces de transmitir... En la presentación oral de una visualización los elementos van apareciendo poco a poco completando una imagen que empieza siendo simple y termina tal vez extraordinariamente complicada...La ***visualización es, por tanto un proceso dinámico."***

Nuestro propósito, por tanto es contribuir de alguna manera a mejorar la enseñanza de algunos tópicos del análisis matemático donde los procesos dinámicos adquieren toda su fuerza e incitar a los docentes a usar de forma habitual los procesos formales "reforzados con técnicas visuales".

"Se dice que Einstein pensó en términos pictóricos. Parece que sería útil para nuestros estudiantes que piensen también de esta manera" (*"Sobre la resistencia a visualizar en matemáticas."* T. Eisember & T. Dreyfus [6]).

Los conceptos que trataremos de analizar, para su posterior enseñanza en el entorno educativo son los relacionados con la completitud de **R**, las sucesiones de números reales y la operación de "paso al límite".

Por otra parte, y para desarrollar este trabajo analizaremos el contenido de las contestaciones que han presentado profesores de reconocida experiencia en la enseñanza secundaria - universitaria a la encuesta que se presenta más adelante y que nos servirá de orientación para:

- *Analizar cualitativamente "lo que piensan" y "cómo piensan" estos profesores sobre la "parte intuitiva" y la "parte formal" de cuestiones fundamentales y aparentemente simples del análisis.*
- *Saber el uso y la importancia que dan a las representaciones visuales.*
- *Conocer en muchos casos cómo se ha trasmitido el conocimiento de estas cuestiones hasta el momento, cómo se trasmite en la actualidad y si se percibe algún cambio con vistas al futuro.*

Concluiremos nuestro trabajo con una serie de aplicaciones de un paquete informático, como MAPLEV, en el desarrollo de un tema conocido como el de "sucesiones". Además en este último apartado, utilizaremos aspectos sencillos de programación en BASIC para apoyar el esquema conceptual que a continuación vamos a proponer.

2 UN ESQUEMA CONCEPTUAL Y EL ORDENADOR.

Se sabe que a través de la historia, la génesis y evolución de los conceptos matemáticos han sido muy diversas y que éstos han tenido puntos de partida diferentes; por ejemplo en el siglo XVIII, los matemáticos, a partir de situaciones intuitivas lograron formalizar ideas o conceptos, que más tarde conducirían a importantes resultados del cálculo infinitesimal.

En la literatura sobre Educación Matemática está bien extendida la idea de que es importante utilizar esta génesis y evolución de los conceptos para el proceso de enseñanza (Hitt, [8]); pero por otra parte, cuando tratamos de iniciar a los alumnos en el estudio de nuevos objetos, desde nuestro punto de vista pensamos que los profesores, consciente o inconscientemente, seguimos un esquema natural, similar al que exponemos y justificamos a continuación. Este esquema se apoya en cuatro puntos básicos o de referencia que, por orden de aparición, irán ayudando a consolidar y estructurar las ideas y conceptos matemáticos de nuestros estudiantes:

a) *La palabra (enunciado).*
b) *La representación simbólica.*
c) *La representación visual.*
d) *La manipulación.*

a) Cuando el profesor de matemáticas inicia a sus alumnos en el estudio de un nuevo concepto, como puede ser el de sucesión, función, límite, derivada, etc., el primer paso consiste, en general, en dar una definición o explicación mediante palabras (obviamente se trata del enunciado); con ello, en la mente de cada individuo se creará una primera aproximación o imagen mental de lo que el profesor desea transmitir.

b) Posteriormente, el docente introducirá la simbología que permitirá formalizarlo y aclarar, en muchos casos, la definición.

c) Con la representación visual o gráfica correspondiente la idea es asimilada por el alumno que hace de la misma "algo" propio e interior. La imagen que el alumno ha captado se identifica con la forma material que es la representación gráfica.

d) Por tanto se está en condiciones de comenzar a trabajar y manipular la realidad matemática, explorándola e investigándola para así obtener conclusiones.

Esta última fase, de manipulación y/o aplicación, se puede llevar a cabo mediante el uso del ordenador como instrumento complementario de trabajo, lo que facilitará el desarrollo de su formación matemática.

La presencia del ordenador en el aula, con sus amplias perspectivas de futuro, está cambiando la dinámica de la situación didáctica (profesor-alumno-instrumentos didácticos). El profesor comienza a tener un papel secundario, ya que su labor debe ser sólo orientadora y ésta consistirá en introducir al alumno en un proceso de aprendizaje basado en la experimentación y la práctica de los métodos de ensayo-error. De esta forma, a partir de los conocimientos básicos previos y de ciertas observaciones del docente, el alumno poco a poco, se sentirá capaz de construir su conocimiento. Sus pequeños pero propios descubrimientos le harán sentir la satisfacción de un auténtico investigador y le motivarán a continuar profundizando en el campo de la matemática; así pues:

- *Cuando el alumno por sí mismo, utilizando la técnica de auto - aprendizaje, en la que él es el centro de la actividad educativa, cubre los contenidos propuestos, experimentando (equivocándose y auto - corrigiéndose) y llegando a conclusiones correctas...*
- *Cuando el alumno ha "visualizado" la tarea a desarrollar,...*
- *Cuando el alumno ha "salvado" (grabado) y protegido su propio trabajo,...*
- *Cuando lo ha impreso para llevarlo como un documento de su propia creación,...*

"la situación didáctica" es bien diferente a la tradicional o estándar, en la que el profesor imparte su clase magistral y el alumno permanece pasivo tomando nota (desde luego no es lo mismo que un alumno obtenga , por ejemplo, un listado de integrales en el aula o de un libro de texto, a que ese mismo alumno construya el listado y "lo haga suyo").

Existen numerosas razones por las que el uso del ordenador ofrece ventajas (Amillo, Ballesteros y otros, [2]):

- *Cambia la percepción del estudiante sobre las matemáticas.*
- *Permite la concentración en la resolución de problemas.*
- *Invita a experimentar.*
- ***Revitaliza el énfasis geométrico - visual.***
- *Motiva.*
- *Proporciona madurez.*

Es importante destacar que si utilizamos un software adecuado, como pudiera ser MAPLEV, los apartados b), c) y d) del esquema presentado podrían desarrollarse notablemente, dado que el núcleo de cálculo simbólico de este software es muy potente y sus capacidades gráficas suficientes.

Es en este contexto donde queremos movernos y desarrollar nuestra

futura investigación. Nos apoyaremos en el esquema conceptual propuesto, en la encuesta formulada, en el uso del ordenador y en nuestra propia experiencia.

3 ENCUESTA, RECOGIDA DE DATOS Y ANÁLISIS.

3.A) - ENCUESTA.

La presente encuesta, anónima y confidencial, se propuso a doce profesores del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna (Tenerife, ESPAÑA), la mayoría de los cuales tiene una amplia experiencia, de una u otra forma, en la enseñanza secundaria.

Se analizaron al azar, seis de ellas, las que en orden cronológico fueron entregadas a los autores de este trabajo.

El objetivo perseguido:

- analizar lo que los profesores piensan,
- examinar cómo los profesores explican,
- indagar en los aspectos visuales que utilizan cuando explican y
- sondear el estado en que se encuentra la enseñanza - aprendizaje y las perspectivas de futuro de los tópicos:

Completitud de R
Sucesiones de números reales y
Operación de "paso al límite".

La encuesta es la siguiente:

1.- Cuando reflexionas sobre la completitud de R.

1.1 ¿Qué imagen mental te sugiere?
1.2 ¿ Cuál sería la representación visual de esa imagen?
1.3 ¿ A qué objeto o cosa de la vida real se asemejaría dicha representación?
1.4 ¿ Se corresponde esa idea intuitiva con los aspectos teóricos del Axioma de Completitud? ¿ Cuál sería la dificultad o el obstáculo?

2.- Reflexiona sobre la no completitud de Q y responde a las cuestiones siguientes:

2.1 ¿Qué imagen mental te sugiere el hecho de que Q no sea completo?
2.2 ¿ Cuál sería la representación visual de esa imagen?
2.3 ¿ A qué objeto o cosa de la vida real se asemejaría dicha representación?

2.4 ¿ Podrías dibujar un "zoom" de un subintervalo cualquiera del intervalo [0,1] de la recta racional? ¿ Y un zoom del zoom anterior? .

2.5¿ Crees que es importante que un alumno de Bachillerato conozca "al menos intuitivamente" estas, y otras cuestiones relacionadas con **Q** y con **R**?

3.- Cuando reflexionas sobre la definición (ϵ, ν) de límite de una sucesión de números reales:

3.1 ¿Qué imagen intuitiva te sugiere?

3.2 Cuando intentas visualizar esa definición, ¿ la imagen es estática o dinámica?

3.3 ¿Qué tipo de diagrama o representación usas para explicar el concepto?

3.4 ¿ Conoces otras alternativas de representación?

3.5 Cuando explicas las sucesiones acotadas de números reales, ¿ utilizas algún tipo de representación visual? ¿ Podrías dibujarlas?

3.6 Al hacer la demostración: "Toda sucesión convergente está acotada", ¿ utilizas algún tipo de diagrama visual?

3.7 Cuando explicas el teorema fundamental: " Toda sucesión de números reales monótona creciente y acotada superiormente es convergente" en el que es necesario aplicar el axioma de "completitud" de **R**, ¿ introduces algún tipo de representación visual? ¿ Podrías dibujarla?

3.8 ¿ Crees que un alumno de Bachillerato-Logse podría asimilar con garantías la definición de límite (ϵ, ν)? ¿ Por qué?

3.9 ¿ Piensas que se debería de explicar a estos niveles?

3.10 Si crees que no, ¿ en qué aspectos (conceptos) se debiera "insistir" en el Bachillerato para que la formación del alumno mejorara a la hora de ingresar en la Universidad?

Cálculo proposicional.

Valor absoluto (distancia entre los números reales o entre dos puntos del plano **R** × **R**).

Relación del valor absoluto en **R** con los intervalos.

Relación de la aplicación "módulo" en **R** × **R** con los discos.

Otros que propongas.

3.11 ¿ Conoces algún software (paquete informático para enseñanza de las matemáticas) con el que hacer más asequible y más atractiva esta parte de la matemática? ¿ Lo utilizas con tus alumnos al menos en grupos reducidos en tu despacho o sala de informática?

4.- Reflexiona sobre la operación "PASO AL LIMITE".

4.1 Según tu opinión, cuando un alumno llega a la Universidad ¿tiene asimilada esta operación?

4.2 ¿ Piensas que los alumnos de Bachillerato han sentido la necesidad de utilizar dicha operación en algún ambiente matemático, o el estudio ha quedado limitado solamente al cálculo algorítmico de límites de sucesiones?

4.3 ¿ En qué momento de su formación universitaria un alumno "siente la necesidad " de utilizar la operación "PASO AL LIMITE" ? Señala los tres tópicos más significativos (según tu punto de vista).

3.B) -RECOGIDA DE DATOS Y ANÁLISIS.

La estructura que vamos a seguir para desarrollar este trabajo será la siguiente:

En primer lugar recogeremos textualmente las respuestas así como las representaciones visuales más significativas del apartado uno y dos, procediendo seguidamente a su análisis y obtención de conclusiones. Posteriormente utilizaremos el mismo esquema para los apartados 3 y 4.

Respuestas textuales a los apartados 1 y 2.

1.1 **Profesor A:** *Algo continuo, completamente "lleno".*
Profesor B: *Continuo.*
Profesor C: *Un conjunto compacto, sin "agujeros" ni fisuras.*
Profesor D: *La idea de continuidad.*
Profesor E: *Un continuo, sin principio ni fin, ni agujeros.*
Profesor F: *Algo compacto, sólido, formando un todo que no tiene fin.*

1.2 **Profesor A:** *La recta, la línea continua.*
Profesor B: *Recta, curva continua.*
Profesor C: *Una recta continua.*
Profesor D: *La de una recta. La del "discurrir del tiempo".*
Profesor E: *Una recta, un alambre infinito.*
Profesor F: *Una recta ilimitada.*

1.3 **Profesor A:** *Las líneas continuas en una carretera; o un hilo continuo de agua saliendo de un grifo.*
Profesor B: *Idea de continuidad, recta ideal.*
Profesor C: *No hay nada en la vida real tan absolutamente compacto, ya que la materia está formada por átomos que no son compactos y dejan vacíos entre sí.*
Profesor D: *El tiempo. El espacio.*
Profesor E: *Al tiempo.*
Profesor F: *Una calle muy larga tal que si miramos a la izquierda o a la derecha no podemos imaginarnos donde acaba.*

1.4 **Profesor A:** *Creo que es sólo una idea intuitiva, porque teóricamente hemos de introducir una relación de orden para la explicación del Axioma de Completitud.*
Profesor B: *No se corresponde en absoluto. La dificultad es manifiesta, pasaron 2500 años hasta que se formuló el Axioma de Completitud.*
Profesor C: *Sí, La dificultad surge a partir del hecho de que los números racionales no "llenan" por completo la recta numérica. Por ejemplo* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *y aunque se pueden dar sucesiones racionales de aproximaciones a* $\sqrt{2}$ *el conjunto de las cotas superiores de* $P = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$ *no posee mínimo en* $\mathbb{Q}$ *pero si en* $\mathbb{R}$*. Por esta razón se dice que* $\mathbb{R}$ *es completo, mientras que* $\mathbb{Q}$ *no lo es.*
Profesor D: *La medida del tiempo se efectúa habitualmente de modo discreto. La medida del espacio se suele presentar con medidas aproximadas.*
Profesor E: *No creo, en la vida cotidiana los números reales no se usan.*
Profesor F: *La interpretación intuitiva del apartado último no se corresponde con los aspectos teóricos del axioma de completitud ya que este axioma es creado por la mente humana a efectos de elaborar una teoría. La dificultad sería que tendríamos que recorrer e incluso visualizar muy detalladamente los pasos necesarios para llegar al axioma de completitud.*

2.1 **Profesor A:** *Una colección de infinitos puntos, que pueden estar tan "próximos" como uno quiera y a pesar de eso podemos separar siempre en dos conjuntos disjuntos y cerrados. Al hablar de cerrados, la imagen mental que tengo de* $\mathbb{Q}$ *es la colección de puntos ordenados en la recta* $\mathbb{R}$.
Profesor B: *Nube de puntos.*
Profesor C: *Un conjunto totalmente discontinuo debido a los números irracionales.*
Profesor D: *La de discontinuidad.*
Profesor E: *Un discontinuo.*
Profesor F: *Algún conjunto en que sus elementos estén distanciados unos de otros.*

2.2 **Profesor A:** *La representación visual de la imagen mental de la no completitud de* $\mathbb{Q}$ *son los puntos de* $\mathbb{Q}$ *sobre la recta* $\mathbb{R}$ *tan próximos como uno quiera.*
Profesor B: *Un collar de cuentas sin hilo.*
Profesor C: *Una recta discontinua en todos sus puntos.*
Profesor D: *La de una recta con huecos.*
Profesor E: *Un conjunto de infinitos puntos seguidos pero con huecos entre ellos.*
Profesor F: *Una recta con agujeros.*

2.3 **Profesor A:** *Pensaría en el cielo lleno de millones de estrellas.*
Profesor B: *La vida real no es tan retorcida.*
Profesor C: *Creo que no es representable gráficamente. Pertenece al mundo de los conceptos o ideas y no al mundo real.*
Profesor D: *Una imagen tridimensional sería la de un queso tipo gruyére.*
Profesor E: *No contesta.*
Profesor F: *Una avenida muy larga tal que en uno de sus bordes hay plantados árboles a lo largo de ella.*

2.4 **Profesor A:**

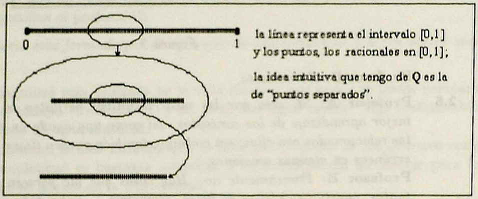

Figura 1.

Profesor B:

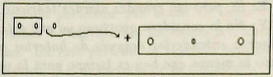

Figura 2.

Profesor C: *Un zoom de un subintervalo* $[0,1] \subset \mathbb{Q}$ *representaría la estructura de todo* $[0,1]$*. Recuerda a los fractales, en los que una parte representa el todo. Por otra parte, creo que las representaciones visuales son peligrosas en muchas ocasiones ya que en lugar de aclarar un concepto, conducen a una interpretación equivocada del mismo.*
Profesor D: *Se hace algo complicado.*

todas ellas aluden de algún modo a la continuidad del conjunto de los números reales:

- En términos de las secciones de números reales:
" Toda sección de números reales se define por cierto número" (Axioma de Dedekind)

- En términos de los segmentos encajados:
" Toda familia de segmentos encajados tiene una intersección no vacía" (Axioma de Cantor).

- En términos de la cota superior e inferior de los conjuntos:
"Todo conjunto no vacío de R, acotado superiormente, tiene extremo superior y todo conjunto no vacío de R, acotado inferiormente, tiene extremo inferior" (Axioma de Weierstrass) (Enciclopedia de las Matemáticas, [16]).

Esta última versión es a la que nosotros nos referiremos (quizás sea la más utilizada), pero en todo caso no es una verdad evidente por sí misma que la continuidad de **R** se desprenda de esos enunciados:

"La interpretación intuitiva del apartado último no se corresponde con los aspectos teóricos del axioma de completitud ya que este axioma es creado por la mente humana a efectos de crear una teoría. La dificultad sería que tendríamos que recorrer e incluso visualizar muy detalladamente los pasos necesarios para llegar al axioma de completitud" (Profesor E).

"Sí, la dificultad surge a partir del hecho de que los racionales "no llenan" por completo la recta numérica..." (Profesor C).

No es por tanto sencillo llegar a un resultado como éste y es lógico que el alumno tenga verdaderas dificultades para entenderlo. Nótese que dentro de la tercera versión del axioma hay implicados varios conceptos que tiene que relacionar simultáneamente:

- *el de conjunto,*
- *el de conjunto ordenado (y las propiedades que conlleva),*
- *elementos notables de un subconjunto de un conjunto ordenado (máximo, cota superior, mínima cota superior o supremo,...);*

se hace por tanto necesario indagar más profundamente en la propiedad y compararla con otras situaciones para aclarar las ideas.

De la misma forma que en la vida real para poder valorar en toda su dimensión la **libertad** es necesario no haberla disfrutado, o para valorar la **felicidad** es necesario haber sido previamente infeliz, para comprender la completitud es fundamental saber que significado tiene la no completitud. Por esta razón se han formulado las cuestiones del apartado dos de la encuesta.

Al analizar estas respuestas, observamos que la imagen mental asociada a la no completitud de **Q** se compara con "algo discontinuo".

Q es identificado como:

"Una colección de infinitos puntos, que pueden estar "tan próximos" como se quiera y a pesar de ello siempre podemos separar dos de los puntos en dos conjuntos disjuntos y cerrados, entendiendo por cerrados una colección de puntos ordenados en la recta **R***"* (Profesor A)

La imagen visual que algunos profesores tienen de **Q** se asemeja a:

.- *un collar de cuentas sin hilo,*
.- *una recta con agujeros,*
.- *una avenida muy larga tal que en uno de sus bordes hay árboles plantados,...*

Estas tres analogías (metáforas extramatemáticas) hacen referencia a objetos o imágenes de una sola dimensión, mientras que las siguientes a entes de tres dimensiones:

.- *una nube de puntos,*
.- *un queso tipo gruyére,*
.- *el cielo lleno de millones de estrellas*

haciendo todos ellos clara alusión a la idea de "discontinuidad".

En cuanto a su representación gráfica, el profesor que más precisa, afirma:

"Creo que no es representable gráficamente. Pertenece al mundo de los conceptos o ideas y no al mundo real" (Profesor C),

lo cual, evidentemente, es cierto dado que **Q**, igual que **R**, pertenece al mundo conceptual; pero no por ello podemos evitar dar una presentación intuitiva y en consecuencia una representación gráfica. En cualquier caso la imagen mental y su representación visual "aproximada" se hacen necesarias para los alumnos que comienzan a manipular estos conjuntos.

A pesar de que las reflexiones que hacen los profesores parecen sencillas, en el fondo conllevan un fuerte aparato formal, y la mayoría de los alumnos ingresan en la Universidad sin tener las ideas claras sobre el conjunto de los números reales y de sus subconjuntos; desconocen o confunden aspectos fundamentales como:

- *la diferencia entre entero y natural,*
- *no identifican los enteros como racionales,*
- *la diferencia entre números decimales y números decimales exactos,*
- *la diferencia entre racional e irracional,...*

Por ello y aunque las respuestas del apartado 2.5 han resultado variadas, consideramos importante que el alumno conozca estas cuestiones al inicio de la carrera universitaria, no obstante:

"sin recurrir a grandes alardes teóricos"(Profesor E)

Como consecuencia de esto, muchos profesores de Bachillerato y primero de carrera deben comenzar el curso con una primera lección introductora en la que se incluya un esquema similar al siguiente:

- **Números Reales (R)**
  - **Racionales (Q)**
    - **Enteros (Z)**
      - **Positivos** ($N^{+} = N - \{0\}$)
      - **Cero**
      - **Negativos** (Z^{-})
    - **Fraccionarios**(*) **(Q - Z)**
      - **Decimales exactos**
      - **Decimales periódicos**
        - **puros**
        - **mixtos**
  - **Irracionales (R - Q)**

(*) Fraccionarios propiamente dichos.

La estructura puntual de **R**, igual que muchas de sus propiedades, queda perfectamente definida cuando el profesor, con ayuda del esquema anterior, hace un recorrido que permita a los alumnos conocer la naturaleza y las principales diferencias entre los conjuntos de números. Debe hacerse hincapié en el hecho de que **Q** y **R** $-$ **Q** son dos subconjuntos disjuntos de **R**; para demostrarlo se prueba que cualquier irracional no puede expresarse como cociente de dos enteros primos entre sí. Es en este momento, si se cree conveniente, cuando el profesor introduce la conocida demostración por reducción al absurdo de que $\sqrt{2}$ no es racional, o lo que es lo mismo, que el cuadrado de un racional no puede ser 2.

Este esquema junto a la representación gráfica sobre una recta de los números reales constituye un soporte intuitivo vital en la aplicación de la matemática a la Ciencia y a la Tecnología.

Volviendo a nuestra encuesta, el profesor C, refiriéndose a **Q** señala:

"Un conjunto totalmente discontinuo debido a los números irracionales"

Por tanto, la existencia de los números irracionales se justifica de forma gráfica diciendo que si se marcaran en la recta todos los racionales quedarían "huecos". En esos huecos están los irracionales: $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, ..., \pi, e, ...$ Sería por tanto conveniente que los alumnos "asignaran" a los irracionales más sencillos, puntos sobre la recta real, utilizando como punto de partida $\sqrt{2}$ (diagonal de un cuadrado de lado uno), y a partir de ahí, rectángulos de altura 1 y base adecuada (por ejemplo, para "rellenar el hueco" en el que estaría $\sqrt{3}$ se tomaría un rectángulo de altura 1 y base $\sqrt{2}$).

Aspectos pedagógicos.

En este punto es necesario añadir, como aspecto pedagógico, que cualquier concepción normal de los números irracionales, sólo se comprende realmente a partir de los números racionales: la imposibilidad real de manejar la representación decimal de un número cuando tiene infinitas cifras decimales obliga a introducir valores aproximados; por ejemplo, los números racionales 2.71828 y 2.71829 son dos valores aproximados del número irracional e en menos de 10^{-5} por defecto y por exceso respectivamente.

Un segundo aspecto pedagógico sería aprovechar el esquema anterior para hacer notar a nuestros alumnos cuestiones tan elementales como:

- La "insuficiencia" del conjunto de los números naturales N;

en este conjunto las ecuaciones de la forma $x + a = b$, a y b números naturales no tienen solución natural cuando $a > b$, y por esa razón se hace necesario "construir" un conjunto más amplio, que llamaremos el conjunto de los números enteros, simbolizado por **Z**, en el que **N** quede sumergido, y en el que el problema anterior quede resuelto.

- La "insuficiencia" de Z;

en este conjunto las ecuaciones de la forma $x \cdot a = b$, a y b números enteros, a distinto de cero, no siempre tienen solución entera: sólo existirá solución si a es un divisor de b, y por esa razón se hace necesario disponer de un nuevo conjunto, que se denominar conjunto de los números racionales, **Q**, en el que **Z** quede incluido, y en el cual todas las ecuaciones anteriores admitan solución.

- La "insuficiencia" de Q;

en este conjunto las ecuaciones de la forma $x^2 = a$, a entero positivo, no siempre tienen solución racional: sólo existirá tal solución en **Q**, y no única, si a es un cuadrado perfecto, y que por esa razón se hace necesario trabajar en un conjunto más amplio, que será el conjunto de los números reales, **R**, que contenga a **Q**, y en el que el problema anterior quede resuelto.

- La "insuficiencia" de R;

en este conjunto las ecuaciones de la forma $x^2 + a = 0$, $a > 0$, no siempre tienen solución real, por lo que se hace necesario construir el conjunto de los números complejo **C**, tal que **R** esté contenido en **C** y en el que todas las ecuaciones del tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n = 0$ admitan solución. Esto se conoce como "Teorema

Fundamental del Álgebra".

Estas ideas pueden visualizarse o geometrizarse globalmente en el siguiente diagrama:

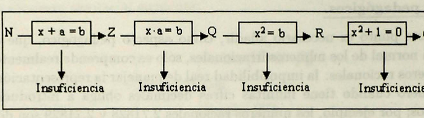

Figura 4.

Hemos dejado para el final de este análisis las reflexiones que hacen los profesores encuestados al apartado 2.4 para conectarlas con ciertos aspectos teóricos y visuales sobre la no completitud de **Q**.

Como ya hemos dicho el axioma de completitud de **R** se enuncia:

"Todo subconjunto no vacío de R, acotado superiormente, tiene cota superior mínima"

su negación aplicada a **Q** dirá:

"Existen subconjuntos no vacíos de Q, acotados superiormente, sin cota superior mínima"

El profesor C señala en su respuesta a 1.4

"...el conjunto de las cotas superiores de $P = \{x \in Q / x^2 < 2\}$ *no posee mínimo en* **Q**...*"*

¿ Cómo visualizar este aserto?

La figura 5 nos muestra un diagrama en el que aparece el conjunto S de los racionales positivos o nulos cuyo cuadrado es menor que 2:

$$S = \{ x \in Q \cup \{0\} / x^2 < 2 \} \subset Q$$

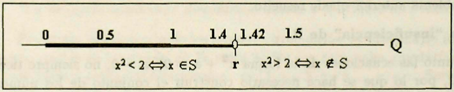

Figura 5.

En él aparecen varios elementos de S: el **0**, el **0.5**, el **1** y el **1.4**, dado que los cuadrados de todos ellos son menores que 2. Además podemos ver los racionales **1.42** y **1.5** que no pertenecen a S (pues su cuadrado es mayor que 2), pero son cotas superiores del mismo lo que nos permite afirmar que este subconjunto está acotado superiormente. Por último, aparece un elemento **r** que "separa" (o se encuentra en la frontera) a los elementos que pertenecen a S de los que no pertenecen.

¿ Tendrá S extremo superior? Es decir, de entre todas las infinitas cotas superiores μ_i , **i=1,2,3,...,n,...** de S, ¿ existirá una $\mu \in$ **Q** que sea la menor de todas ellas?

Supongamos que tal μ exista, o lo que es lo mismo, supongamos que $\mu =$ **Sup(S)**; ¿ dónde se encontraría ese extremo superior?

Existen dos alternativas:

1) Lo más probable es pensar que a la derecha de **r**, y muy próximo a **r**, con lo que $\mu^2 > 2$ (μ^2 no puede ser 2 pues el cuadrado de un racional nunca puede serlo).

2) No podemos rechazar la posibilidad de que μ se encuentre a la izquierda de **r** (aunque no parezca una posibilidad natural) y, en este caso se tendría: $\mu^2 < 2$.

Pues bien, para la opción (1) siempre podemos encontrar un $\mathbf{k} \in \mathbf{Q}^+$ tal que $(\mu - \mathbf{k})^2$ sea mayor que **2** y en consecuencia μ no sería la cota superior más pequeña.

De igual forma, para la opción (2) siempre podemos encontrar un $\mathbf{h} \in \mathbf{Q}^+$ tal que $(\mu + \mathbf{h})^2$ sea menor que **2** lo que nos dice que $(\mu + \mathbf{h}) \in$ S, y como $\mu < \mu + \mathbf{h}$ por ser $\mathbf{h} > \mathbf{0}$, μ no sería extremo superior de S, en contra de lo supuesto. (Véase Fernández Viña, [7] y Visualización y creatividad [5]).

Estas ideas pueden visualizarse en la figura 6:

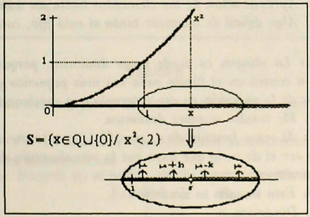

Figura 6.

Es ahora cuando el lector puede conectar estas reflexiones con las representaciones que hacen los profesores A, B y D de un zoom de un subintervalo del intervalo $[0,1]$ de $\mathbf{Q}$.

Cada uno de estos profesores hace una representación gráfica del zoom distinta; no obstante la interpretación de las mismas nos conduce a una conclusión similar: La estructura de cualquier subintervalo del intervalo $[0,1] \cap \mathbf{Q}$ es idéntica. Al intentar analizar un subintervalo sumamente pequeño, entre sus extremos encontramos infinitos racionales que, aunque separados entre sí por diminutos huecos, ofrecen una visión global de ellos completamente igual a la del intervalo racional $[0,1]$, sólo que a una escala menor. Mediante el zoom, aumentamos esa imagen y lo que observamos es una visualización idéntica a la de $[0,1] \cap \mathbf{Q}$.

Quizás la representación gráfica del zoom más visual y nítida para entender esto último es la aportada por el profesor E que toma en los dos casos subintervalos cada vez más pequeños del intervalo unidad, ambos centrados en $1/2$ y de radio primero $1/4$ y luego $1/8$. Así trata de indagar en la estructura de cualquier subintervalo racional de $[0,1]$ en las proximidades a $1/2$.

Respuestas textuales de los apartados 3 y 4.

3.1 **Profesor A:** *Me sugiere el acercamiento a un cierto valor (el límite) tanto como uno quiera; acumulación de números reales al límite.*
Profesor B: *Ninguna. Es una definición sumamente elaborada tras siglos de trabajo. No me parece ni obvia ni intuitiva.*
Profesor C: *La de una sucesión de números de* $\mathbf{R}$ *cuya distancia* ϵ *a uno fijo decrece a medida que aumenta* ν.
Profesor D: *La imagen que me sugiere es la de un rectángulo en el que al acortar la base, también se acorta la altura.*
Profesor E: *Aproximación de los elementos hacia un número.*
Profesor F: *Algo difícil de alcanzar tanto si está fijo, como si se está moviendo.*

3.2 **Profesor A:** *La imagen es desde luego dinámica, porque vamos tomando intervalos con centro en el límite cada vez más pequeños y esto implica que los elementos de la sucesión en ese intervalo van cambiando también.*
Profesor B: *Me resulta siempre dinámica.*
Profesor C: *Al ser* ν *función de* ϵ, $\nu = f(\epsilon)$, *cuanto menor es el valor de* ϵ *mayor ha de ser el de* ν, *lo que hace que la visualización de la definición sea totalmente dinámica.*
Profesor D: *Esta imagen es dinámica.*
Profesor E: *Dinámica.*
Profesor F: *Ambas imágenes ya que al ser muy difícil el concepto cualquier cosa es buena para aclarar su comprensión.*

3.3 **Profesor A:** *Creo que lo explicaría sobre la recta real.*

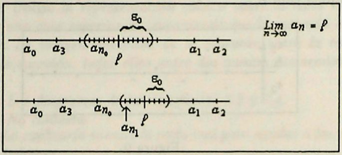

Figura 7.

Profesor B: *El de una función continua.*
Profesor C: *Para explicar el concepto suelo representar los primeros términos de la sucesión en la recta real y le doy un valor arbitrario a ϵ, por ejemplo, $\epsilon = 0.1$, hallando a continuación por tanteo el correspondiente valor de ν que verifica la definición. Luego tomo $\epsilon = 0.01$ y vuelvo a hallar el correspondiente ν. De este modo intento que los alumnos comprendan la definición.*
Profesor D: *No suelo explicar este concepto con esta definición rigurosa.*
Profesor E: *Representarlo en una recta.*

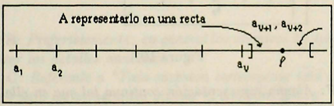

Figura 8.

Fuera, sólo un número finito de elementos; infinitos caen en el pozo (intervalo).
Profesor F: *Por un lado una representación unidimensional, y por otro una representación bidimensional.*

3.4 **Profesor A:** *Hacerlo en el plano; con la representación de la función*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbf{N} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ & 1 & \mapsto & a_1 \\ & 2 & \mapsto & a_2 \\ & & \cdots\cdots & \end{array}$$

y estudiarlo análogamente a como se hace para $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *siendo f una función definida para* $\mathbb{R}$.

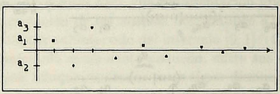

Figura 9.

Profesor B: *Con la definición en la mano: hay muchas posibles.*
Profesor C: *Sí, análogas a la anterior, aunque creo que esta es la más intuitiva para los alumnos y, por tanto, la mejor.*
Profesor D: *No.*
Profesor E: *Sí, la funcional.*

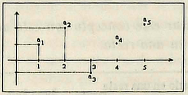

Figura 10.

Profesor F: *Alguna representación continua tal que en ella se pueda visualizar la definición* (ϵ, ν).

3.5 Profesor A: *La imagen visual de una sucesión acotada en* $\mathbb{R}$ *es la de una serie de puntos en un intervalo acotado de* $\mathbb{R}$ *(número finito o infinito de puntos).*

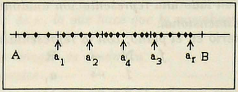

Figura 11.

Profesor B: *Siempre utilizo gráficas para todas las explicaciones (otra gente no y esto creo, es un tema de organización mental).*

Profesor C: *Utilizo la representación clásica sobre la recta real, tomando* a_1, a_2, *etc., y una cota superior* K, *suponiendo que la sucesión es creciente.*

Profesor D: *La imagen dinámica de ir situando sobre la recta real, los términos de la sucesión, todos ellos entre dos puntos destacados que son las cotas.*

Profesor E: *Los diagramas de las cuestiones 3.3 y 3.4.*

Profesor F: *No contesta.*

3.6 **Profesor A:** *Lo explicaría usando la recta real para ayudar a las explicaciones matemáticas teóricas.*

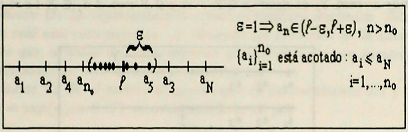

Figura 12.

Profesor B: *Preferiblemente: en general los alumnos no son capaces; después de completar los detalles analíticos.*

Profesor C: *Referente a "Toda sucesión convergente está acotada" es mejor y más claro para los estudiantes utilizar el contrarecíproco: "Una sucesión no acotada no puede converger". Visualmente es fácil de captar.*

Profesor D: *La imagen visual de situar el límite sobre la recta real. Un intervalo centrado en el límite en el que se destaca que están todos los términos posteriores a uno concreto. Otro intervalo cuyos extremos serán las cotas, en cuyo interior estén, además del intervalo antes señalado, todos los términos anteriores al citado anteriormente.*

Profesor E: *Sí, el mismo diagrama que en la pregunta 3.3.*

Profesor F: *Por un lado se debe dar la demostración rigurosa ya que no es muy complicada (siempre que se haya digerido bien el concepto de límite), y además debe utilizarse al menos una representación unidimensional que clarifique en la medida de lo posible los pasos seguidos en la demostración.*

3.7 Profesor A: *En dicho teorema hacemos uso del axioma de "completitud" para ver que si la sucesión está acotada superiormente entonces existe el supremo del conjunto, es decir, la mínima cota superior. Para explicar la existencia de una cota se podría utilizar de nuevo la recta.*

$$X = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$Y = \{\textit{cotas superiores de } X\} = \{y \in \mathbf{R} : y \geq a_i, \ i = 1, \ldots\}$$

Como $\mathbf{R}$ *es completo encontramos* $c \in \mathbf{R} : \forall i = 1, \ldots, \ \forall y \in Y, a_i \leq c \leq y$.

Además c=mín Y, es decir, $c \in Y$: *si* $c \notin Y \Longrightarrow \exists\, a_j \in X : c < a_j$.

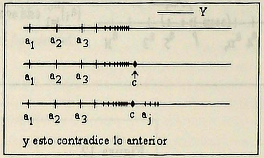

Figura 13.

Ahora veríamos que:

$$\lim_{i \to \infty} a_i = c.$$

Dado $\epsilon > 0$, $c - \epsilon/2$ *no está en* $Y \Longrightarrow \exists\, a_N \in X \ : \ c - \epsilon/2 < a_N \leq c$ *y como es creciente,* $n \geq N \ : \ c - \epsilon/2 < a_N \leq a_n \leq c$.

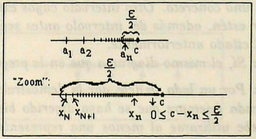

Figura 14.

$$0 \leq c - a_n \leq \frac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |a_n - c| < \epsilon \ , \ n \geq N.$$

Profesor B: *La representación gráfica, creo es imprescindible.*

Profesor C: *Si a_n es creciente y K es el extremo superior, $a_n < K, \forall n$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario $K - \epsilon < a_p$, para algún p dependiendo de ϵ, etc.*

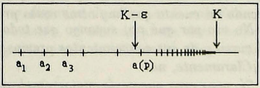

Figura 15.

Profesor D: *La representación visual es también dinámica. Situar sobre la recta real una cota superior. Ir situando los términos de la sucesión, destacando que, al haber una cota superior y tratándose de una sucesión creciente, los términos se irán aproximando entre sí.*

Profesor E: *Sí, el mismo diagrama que en las cuestiones 3.3 y 3.5.*
Si $\alpha = sup\{a_n ; n \in N\}$ intuitivamente se ve que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

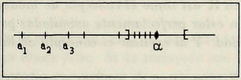

Figura 16.

Profesor F: *Al explicar ese teorema, debido a que necesitamos utilizar el axioma de completitud, toda ayuda es poca. Por eso no está de sobra toda imagen gráfica que nos ayude a comprender el teorema.*

3.8 Profesor A: *Aunque no conozco exactamente cuáles son los conocimientos previos que un alumno de Bachillerato - Logse puede tener a la hora de la introducción de las sucesiones de números reales pienso que no es un concepto demasiado difícil para asimilar teniendo siempre la idea de acumulación de puntos a un valor. (Quizás tenga más dificultad la comprensión de la no existencia de límite, no tanto intuitivamente como en la teoría).*

Profesor B: *Ni en el Bachillerato- Logse ni en los anteriores. Sólo una ínfima minoría tiene la madurez para valorar $\epsilon - \nu$ con toda su potencia.*

Profesor C: *No. Les falta madurez para asimilar dicha definición.*

Profesor D: *No considero que una mayoría de los alumnos de Bachillerato pueda asimilar tal definición. Los motivos: Poco hábito en demostraciones teóricas. Poca capacidad de abstracción.*

Profesor E: *Sí, pienso que sí, pero a un excesivo costo de tiempo y no sé para qué.*

Profesor F: *No lo creo debido a lo siguiente: 1) Es un concepto muy difícil de asimilar; 2) Se necesitaría mucho tiempo para entender algo dicho concepto; y 3) No merece la pena invertir tantas horas en aprender lo que significa este concepto, teniendo en cuenta que hay otras cosas prioritarias que estudiar.*

3.9 **Profesor A:** *No veo por qué no; supongo que todo dependerá del grupo de alumnos en el curso y de sus conocimientos previos.*

Profesor B: *¡Claramente, no!*

Profesor C: *Sí, pero creo que sería mejor emplear una definición más intuitiva. Por ejemplo: " El número real "a" es límite de la sucesión a_n si dado un entorno de "a", los infinitos términos de a_n están dentro de dicho entorno a partir de uno de ellos en adelante". Y apoyarlo con ejemplos y gráficamente.*

Profesor D: *No lo considero necesario. Bastaría con que conociera la idea intuitiva de convergencia.*

Profesor E: *No.*

Profesor F: *Rotundamente no.*

3.10 **Profesor A:** *Creo que la introducción del valor absoluto y su relación con los intervalos en* **R** *así como el concepto de módulo en* $\mathbf{R}^2$ *y su relación con los discos deben estar perfectamente asimilados por un alumno cuando entra en la Universidad. Y al explicar el concepto de límite, estas ideas quedan de manifiesto.*

Profesor B: *Esto es largo de explicar y probablemente (¡seguro!) no soy la persona idónea para marcar pautas o dar directrices.*

¡Todo esto me parece bastante banal en Bachillerato! Estoy seguro de que no aporta formación alguna a la gente.

Profesor C: *No contesta.*

Profesor D: *Todos los temas señalados los considero necesarios para poder continuar con éxito las explicaciones en las asignaturas de matemáticas de los estudios universitarios. Pero más que proponer que se insista en el Bachillerato en estos temas, yo propongo que dichos temas sean tratados al inicio de los estudios universitarios.*

Profesor E: *Fundamentalmente, con la inclusión de la geometría euclídea (en los primeros cursos) y de la geometría analítica (en los últimos).*

Profesor F: *1) Operatoria, 2) Valor absoluto, 3) Representación de curvas, 4) Problemas de enunciado, 5) Aclaración de ciertos conceptos físicos que utilizan las matemáticas de acuerdo con su edad, 6) Problemas de matemáticas comerciales, 7) Probabilidades, 8) Problemas de teorías de juegos unidimensionales, bidimensionales y de mayor número de jugadores, 8) Teoría de números y 9) Idea de programación y estadística.*

3.11 **Profesor A:** *Nunca he dado este tema en las asignaturas que he impartido y tampoco conozco ningún paquete informático para ello.*
Profesor B: *Esto me parece interesantísimo. Incluso a nivel de Bachillerato los programas "Derive" y "Mathematica" creo que estimularían el interés del alumno.*
Profesor C: *Creo que mejor que paquetes informáticos, ya que muchos centros de secundaria no disponen de ellos, es la calculadora. Dado el término general* a_n *de una sucesión, el alumno puede darle valores y descubrir si es convergente o divergente, antes de utilizar las técnicas de cálculo de límites.*
Profesor D: *No*
Profesor E: *Sabes, José Ángel, que no.*
Profesor F: *No*

4.1 **Profesor A:** *Realmente no lo sé, porque no he hecho uso de una "definición matemática" para la operación "paso al límite"; sin embargo, la explicación intuitiva es asimilada fácilmente.*
Profesor B: *El alumno medio (no de la carrera), ¡Nunca!*
Profesor C: *No. Conoce los algoritmos para el cálculo de límites y los aplica de un modo rutinario sin llegar a comprender lo que subyace. Volviendo a 3.11, si quiere calcular el límite de la sucesión*

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

multiplica y divide por el conjugado, etc., y, suponiendo que se equivoque en los cálculos, obtiene un límite falso. Si ha trabajado con la calculadora (3.11) se dará cuenta del error ya que valores de n elevados se ve que el límite es cero:

$$a_{1000} = \sqrt{1001} - \sqrt{1000} \approx 0$$

Profesor D: *No en muchos casos. Sería deseable que tuviera asimilada la idea intuitiva de límite.*
Profesor E: *No*
Profesor F: *No*

4.2 **Profesor A:** *Quizá todo esté en función de cómo se lo plantee el profesor al alumno, pues además del cálculo propio de límites de sucesiones el concepto también aparece a la hora de la continuidad y la derivabilidad de funciones, por ejemplo.*
Profesor B: *Claramente no.*
Profesor C: *La ha utilizado en la definición de derivada, en la aplicación del número* e *al cálculo del interés continuo o desintegración radiactiva de una substancia, crecimiento de un cultivo de bacterias, demografía, etc., pero no creo que haya sentido la "necesidad" de ello.*

Profesor D: *La operación "paso al límite", los alumnos de Bachillerato han observado la necesidad de utilizarla en alguna demostración, en ejercicios de estudio de continuidad y derivabilidad así como en conceptos de Física.*
Profesor E: *Aunque predomina el cálculo algorítmico de límites, puede que inconscientemente el alumno haya utilizado esa operación en otros ambientes. Por ejemplo, al calcular la tangente a una curva (interpretación geométrica de la derivada).*
Profesor F: *La gran mayoría no ha utilizado para nada el concepto, solamente han practicado un cálculo algorítmico de límites de sucesiones.*

4.3 **Profesor A:** *Con respecto a las asignaturas que he impartido, el concepto de "paso al límite" aparece al tratar la derivada en un punto como el límite de los cocientes incrementales, también en la introducción de la integral de Riemann como límite de sumas superiores e inferiores y por último, la aproximación de integrales definidas haciendo uso de la regla trapezoidal o la regla de Simpson.*
Profesor B: *a) El alumno no siente la necesidad de nada. b) Si el alumno sintiera la necesidad del límite se debería dar cuenta por ejemplo, de que los irracionales sólo existen como "límites"*
Profesor C: *Respuesta anterior.*
Profesor D: *Considero que un alumno universitario sentirá la necesidad del paso al límite en conceptos tales como: Integral definida, velocidad, aceleración, etc.*
Profesor E: *Más bien, somos nosotros - los profesores- los que hacemos sentir a los alumnos la necesidad de esa operación en la Universidad.*
- Concepto de derivada y su interpretación geométrica
- Sumación de series (las sumas parciales $\{s_n\}$ aproximan el valor s de la suma de la serie convergente $\lim s_n = s$).
- Área o integración.
Profesor F: *Series, integrales y probabilidades.*

Análisis de las contestaciones a los apartados 3 y 4.

Ateniéndonos a las respuestas de los profesores encuestados, el límite de una sucesión sugiere acercamiento, aproximación de los valores de la sucesión a una cantidad fija que llamamos límite. Ese acercamiento progresivo implica sin lugar a dudas, la acumulación de los puntos de la sucesión que cada vez más próximos entre sí, llegan a confundirse en las cercanías de dicho límite.

Aunque no todos están de acuerdo en que la idea intuitiva se corresponde, a priori, con la definición rigurosa de límite (la formalización de este concepto resultó ser el resultado de muchos siglos de trabajo y reflexión por parte de los matemáticos), sí parece haber consenso en que su complejidad se manifiesta al observar las dificultades con las que los alumnos se encuentran, en general.

Es interesante destacar la respuesta del profesor B a **3.1**:

"*Ninguna. Es una definición sumamente elaborada tras siglos de trabajo. No me parece ni obvia ni intuitiva*".

Sin lugar a dudas estas palabras son fruto de una profunda reflexión, sin embargo, en cuanto a la observación de que tal definición no es intuitiva pensamos que se podría:

- *realizar un análisis gráfico de la misma en* **R** *y en* **R** × **R**, *y al mismo tiempo,*
- *encontrará un paralelismo en lenguaje literario a la definición* (ϵ, ν) *que la haga más asequible; todo ello permitirá manipularla correctamente y así lograr que los aspectos intuitivos adquieran toda su importancia; estas cuestiones serán desarrolladas con detalle en párrafos posteriores.*

El profesor D expresa su visión de límite en forma geométrica, al relacionar la variación de ν a partir del valor de ϵ con la imagen de un rectángulo variable en la que al acortar la base (ν) también se acorta la altura (ϵ). Obviamente esa imagen sugiere movimiento y por ello es dinámica.

Para los profesores encuestados "es discutible" cual es la forma más idónea para explicar el concepto de límite (ϵ, ν) en el aula.

Es ilustrativo el recurso empleado por el profesor E que usa como soporte la recta real; hace ver con su representación, la idea de acumulación de puntos de una forma natural. Elegido un valor arbitrario de ϵ, en el entorno de 1, $(l-\epsilon, l+\epsilon)$, quedan infinitos términos de la sucesión, mientras que fuera sólo un número finito de ellos. Para dar más énfasis a esta idea utiliza una analogía en la que se refleja una vez más el carácter dinámico que subyace en la definición de límite:

"Identifica el intervalo o entorno de "1" con un pozo en el que caen los infinitos puntos de la sucesión como si de una especie de abismo se tratara"

Además de esta representación unidimensional, podemos visualizar la misma idea anterior sobre el plano **R** × **R**, es decir, los infinitos puntos de la sucesión que antes, hipotéticamente, "caían en un pozo", ahora van penetrando en una "banda" centrada en l y de ancho 2ϵ. Esta concepción, que analizaremos con más detenimiento en el punto IV de este trabajo, la consideramos más apropiada, no sólo para introducir el concepto de límite, sino también para iniciar a nuestros alumnos en las ideas básicas de sucesión, de sucesión acotada, etc., incluso para tratar "visualmente" algunos teoremas relacionados con las mismas. Pensamos que la idoneidad de esta versión bidimensional[2] se justifica por varias razones:

a) *Es más natural,*
b) *Es más rigurosa,*

[2]Miguel de Guzmán en el capítulo 4 de su libro "El rincón de la pizarra" hace un estudio de las ventajas de este tipo de representación bidimensional frente a la unidimensional

c) *Se capta mejor a través de los sentidos,*

lo que puede comprobarse observando los gráficos siguientes:

```
>with(plots):
> f:=n->3*(-1)^(n + 1);
```

$$f := n \to 3 \bullet (-1)^{n+1}$$

```
> h1:=plot([[-5,0],[5,0]]):
> h2:=plot([seq([f(k),0.05],k=1..10)],x=-5..5,y=-6..6,style=point):
> h3:=textplot({[-3,-0.75,'a(2)=a(4)=...=-3'],[0,0,'+'],[0,-0.75,'0'],[3,-0.75,
'a(1)=a(3)=...=+3']} ):
> display({h1,h2,h3});
```

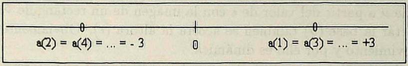

Figura 17.

```
> h4:=plot([seq([k,f(k)],k=1..20)],x=0..20,y=-6..6,style=point):
> display(h4);
```

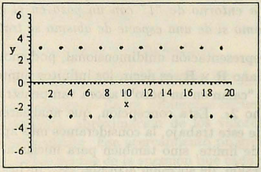

Figura 18.

En la figura (17) anterior, se observa que los elementos de la sucesión de índice impar coinciden

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 3$$

y en este gráfico representan el mismo punto (lo mismo sucede con los términos pares), lo cual puede llevar a confusión. En la Figura 18 esta dificultad queda superada (los profesores A y E del cuestionario utilizan este tipo de representación).

Por tanto, a pesar de la simplicidad de la visualización sobre **R**, en el plano resulta más natural y autoexplicativa ya que la sucesión queda perfectamente definida por la gráfica.

La **acotación** de una sucesión puede ser explicada también a partir de cualquiera de los tipos de representación anterior. Merece especial atención la observación realizada por el profesor C respecto a su forma de explicar la proposición "Toda sucesión convergente está acotada"; utiliza para ello la forma contrarecíproca de la misma que es más fácil de visualizar y por tanto puede resultar más asequible para los alumnos. Sin embargo, este método de demostración exige que los alumnos tengan un cierto dominio del cálculo proposicional, lo cual, suele ser poco habitual. Este profesor, en conversación privada, comentó que durante el presente curso algunos de sus alumnos de 3º de Matemáticas tenían serias dificultades para distinguir la hipótesis y la tesis en un teorema o proposición.

Con respecto a la pregunta 3.7 nos parece acertada e ilustrativa la exposición del profesor A, que combina la demostración formal y rigurosa con el uso de representaciones de tipo unidimensional.

En cuánto a la introducción de estos contenidos en el Bachillerato, está muy extendida la opinión de que es preferible dedicar tiempo en estos cursos a otro tipo de cuestiones que permitan formar a los alumnos como individuos capaces de desenvolverse en la sociedad (geometría, matemáticas comerciales, etc.) (Profesores E y F). Ahora bien en el caso de introducir el estudio del límite, debe ser de un modo intuitivo; sin recurrir a aspectos formales que en estos niveles resultan difíciles de asimilar y con poco contenido desde un punto de vista formativo.

El estudio riguroso del concepto de límite debe ser uno de los primeros objetivos al comenzar los estudios universitarios de cualquier especialidad científica o tecnológica y creemos que sería adecuado abordarlo utilizando algún tipo de paquete informático; nosotros proponemos MAPLEV, puesto que permite a los alumnos explorar el concepto desde distintos puntos de vista.

En la encuesta hemos comprobado que la herramienta informática es, en general, poco conocida y/o utilizada por los profesores que tienen que impartir todo un curso de análisis matemático y son bastante reticentes a disponer de ella, ya sea por la masificación en las aulas, el tiempo que se requiere o desconocimiento. El software educativo constituye una herramienta útil en la enseñanza, por ello debemos aprovechar los medios de que en la actualidad disponemos (casi todos los centros de secundaria cuentan con un aula de informática, el uso de ordenadores y potentes calculadoras de bolsillo como la "Texas Instrument" está cada vez más extendido, etc.) y creemos que se debe potenciar su uso para la consecución de una formación más asequible.

La operación "**paso al límite**" y el análisis de su presencia en la formación matemática de los alumnos es el objetivo del último apartado de la encuesta.

En Bachillerato, el alumno conoce el cálculo algorítmico de límites aplicando de un modo rutinario las reglas que se le han explicado para ello. Sin embargo no llega a comprender el significado profundo de esta operación; sólo si el profesor le introduce el concepto mediante ejemplos visuales y sencillos, el alumno llegará intuitivamente a captar la idea de límite.

De hecho ha sido comprobado por nosotros mismos, en una encuesta realizada a alumnos de 1º Bachillerato - Logse, como éstos son capaces mediante el uso de representaciones visuales, de adquirir cierta agilidad para encontrar el límite de una sucesión dada. Hemos intentado, también con ellos, introducir el estudio formal del concepto de límite mediante la definición rigurosa, pero nuestros alumnos se pierden ante términos de origen matemático como: entorno, valor absoluto, distancia, etc. Si le damos la definición en términos de (ϵ, ν) el alumno se siente enredado por la simbología y ello supone la pérdida de la motivación inicial e incluso de la idea intuitiva que intentábamos transmitir.

En todo caso, el papel del docente es fundamental. La presentación de los contenidos en el aula juega un papel decisivo en la motivación de los alumnos; somos los profesores los responsables de que sientan la necesidad de profundizar en los contenidos que les proponemos:

" *...somos nosotros - los profesores- los que hacemos sentir a los alumnos la necesidad de la operación paso al límite...*" (profesor E)

No obstante, es posible hacer al alumno sentir la necesidad de dicha operación en el desarrollo de varios temas: aplicación del número e al cálculo del interés continuo[3], derivada, integración, integración numérica, etc.

El interés por el estudio y la investigación de estos y otros contenidos matemáticos, adquiere fuerza cuando el alumno siente que dispone de algún medio que le ayude a conectar las cuestiones teóricas con la visualización de las mismas. Es por todo ello por lo que en el apartado siguiente desarrollamos algunos ejemplos concretos que demuestren la utilidad de un paquete informático como MAPLE.

REFERENCIAS

[1] **ACTAS II CONGRESO ESPAÑOL USUARIOS DE MAPLE.** *Universidad de Sevilla. Septiembre de 1996.*

[2] **AMILLO, BALLESTEROS, GUADALUPE & MARTIN.** *Conceptos, Ejercicios, y Sistemas de Computación Matemática, Maple V.* McGraw Hill (1996).

[3]Este tema será objeto de estudio en un trabajo que estamos elaborando

[3] **BLACHMAN, NANCY.** *MATHEMATICA: Un enfoque práctico.* Ariel Informática, Barcelona (1993).

[4] **CARRILLO & LLAMAS.** *MAPLE V. Aplicaciones matemáticas para P. C.* Ra-ma (1995)

[5] **DORTA DÍAZ, J. A.; ESPINEL FEBLES, C. & PLASENCIA CRUZ, I.** *Visualización y creatividad.* Revista Educación Matemática, Volumen 10, nº2. Junio 1998.

[6] **EISENBERG T. & DREYFUS T.** (1990). *On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In Visualization in Teaching And Mathematics.* Zimmermann W, & Cunningham S. Editors. MAA. Series. USA.

[7] **FERNANDEZ VIÑA, J. A.** *Lecciones de Análisis Matemático.* Editorial Tecnos. Madrid, 1976.

[8] **HITT ESPINOSA, FERNANDO** *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum (1997).* Conferencias Magistrales. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. MÉXICO.

[9] **MARLÍN, JOE. A & KIM, HOK** *Calculus and Differential Equations with Maple V.* Departament of Mathematics. College of Physical & Mathematical Sciences.

[10] **MIGUEL DE GUZMÁN.** *El rincón de la Pizarra.* Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisis. Pirámide (1996).

[11] **PIMM, D.** (1990). *El lenguaje matemático en el aula.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America. Ediciones Morata. Madrid.

[12] **J. REY PASTOR Z. & P. Pi CALLEJA & C. A. TREJO** *Análisis Matemático.* Editorial Kapelusz. Buenos Aires, 1998.

[13] **RINCON, GARCIA & MARTINEZ** *Cálculo científico con MAPLE.* RA-MA (1995).

[14] **SOTO M. J. & VICENTE J. L.** *Matemática con MAPLE.* Addison-Wesley Iberoamericana (1996).

[15] **STROYAN, K. D.** *Calculus using Mathematica.* Scientific Proyects and Mathematical Background, Academic Press. Inc, (1993).

[16] **VINOGRÄDOV.** *Enciclopedia de las Matemáticas.* Editorial Mir. Madrid-Moscú (1994).

[17] **WHEALEY, G.H.(1990).** *Spatial sense and mathematics learning.* Aritmetic Teacher. 37(6), 10-11.

[18] **ZIMMERMANN W.-CUNNINGHAM, S.** (Editores) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.*