Cubo Matemática Educacional
Vol. 2. MAYO 2000

Embaldosamiento de Penrose

PETR KŮRKA
Charles University in Prague
Faculty of Mathematics and Physics
Malostranské nám. 25, CZ - 11800
Praha 1, Czechia

Un embaldosamiento es una descomposición del plano en figuras geométricas - baldosas. Suponemos, que hay un número finito de tipos de éstas y de cada tipo un número infinito de ejemplares. Las baldosas se intersectan solamente en sus fronteras y cada punto del plano debe ser cubierto por una baldosa. En el caso más sencillo tenemos un tipo de baldosa que es un polígono regular con n lados. Es claro que un embaldosamiento con n-ágonos regulares es posible solamente para $n = 3, 4, 6$ (ver Fig. 1).

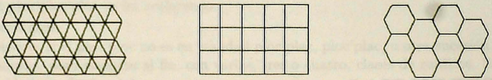

Figura 1

Con figuras irregulares y con más tipos de ellas, hay más posibilidades. En Fig. 2 a la izquierda vemos un embaldosamiento de dos figuras: un octágono regular y un cuadrado.

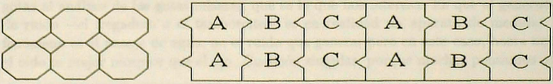

Figura 2

En Fig. 2 a la derecha vemos un embaldosamiento con tres tipos de baldosas, A, B, C que son 10-gonos.

Todos estos embaldosamientos son periódicos. Decimos, que un vector $u \in I\!R^2$ distinto de cero es periodo de un embaldosamiento, si, al aplicar la translación $x \mapsto x+u$ del plano, obtenemos el mismo embaldosamiento. Si u, v son dos periodos de un embaldosamiento, entonces cada combinación lineal $au+bv$ con coeficientes $a, b \in \mathbb{Z}$ enteros es también un periodo de este embaldosamiento. El embaldosamiento de triángulos con lado de largo 1 en Fig. 1 tiene periodos independientes $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. El embaldosamiento de cuadrados en Fig. 1 tiene periodos $(1,0)$ y $(0,1)$. El embaldosamiento en Fig. 2 a la derecha tiene periodos $(3,0)$ y $(0,1)$. Es fácil construir un embaldosamiento que no tiene dos periodos independientes. Con las baldosas A, B, C de Fig. 2 construimos un embaldosamiento de línea horizontal

$$\ldots CCCCABCCCABCCABCABCCABCCCABCCCC\ldots$$

Si colocamos estas líneas una sobre otra, obtenemos un embaldosamiento del plano que tiene como periodo solo $(0,1)$ y sus múltiplos. Si colocamos en cada línea una sucesión aperiodica distinta , obtenemos un embaldosamiento del plano aperiódico que no tiene ningún periodo.

Hay baldosas, con las cuales se puede embaldosar todo el plano, pero cada embaldosamiento es aperiódico. Un ejemplo interesante fue descubierto en 1972 por Roger Penrose (ver Fig. 3).

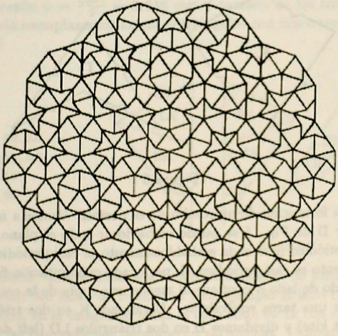

Figura 3

Consiste de dos baldosas K (kite - volantín) y D (dart, flecha), (ver Fig. 4).

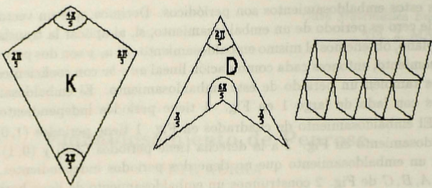

Figura 4

Son cuadriláteros con dos lados cortos y dos lados largos. La razón de estos largos es el número áureo $\psi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Cinco K componen un 10-gono regular y cinco D componen una estrella. D y K componen un rombo, que puede embaldosar el plano de manera periódica (Fig. 4 a la derecha).

Para excluir esta configuración hacemos en cada lado de cada cuadrilátero una incisión triangular, como en Fig. 5,

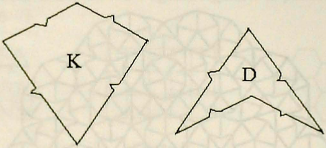

Figura 5

de manera que la formación de un rombo no es posible. Vamos a mostrar, que con las baldosas K y D de Fig. 5 se puede embaldosar todo el plano, ningún embaldosamiento es periódico pero cada embaldosamiento es casi periódico. Decimos que un embaldosamiento es casi periódico, si, para cada configuración finita existe n tal que cada cuadrado de lado n contiene al menos una copia de la configuración.

Consideremos una tarea equivalente. Dividamos K en dos triángulos LK (left kite) y RK (right kite) y dividamos D en dos triángulos LD (left dart) y RD (right dart) como en Fig. 6.

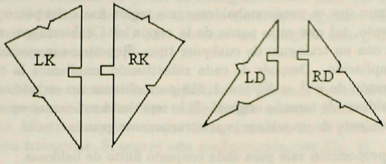

Figura 6

En los lados de división hay una incisión cuadrada. En lugar de dos cuadriláteros tenemos entonces cuatro triángulos. Es claro, que cada embaldosamiento de LK, RK, LD, RD determina el único embaldosamiento de K y L (y vice versa). El lado de incisión cuadrada de cada LK puede tocar solamente el lado correspondiente de RK, y similarmente para LD y RD.

Consideremos ahora una operación de substitución. Supongamos, que tenemos un embaldosamiento de todo el plano o un embaldosamiento de una región finita (una configuración). Dividamos cada LK en tres triángulos chicos LK,RK,LD, cuyo tamaño es en razón $\psi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq 0,618$ con el tamaño de los triángulos originales. Del mismo modo reemplazamos los otros triángulos con dos o tres triángulos chicos como en Fig. 7

LK → LK, RK, LD
RK → RK, LK, RD
LD → RK, LD
RD → LK, RD

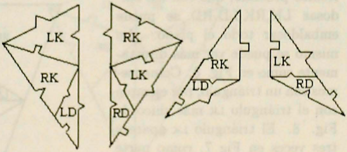

Figura 7

Se puede verificar, que así obtenemos embaldosamiento de baldosas chicas LK, RK, LD, RD. Si se tocan dos lados de triángulos (por ejemplo el lado corto de LK con el lado corto de RD), en la imagen se tocan el lado largo de LK con el lado largo de RD, entonces todas las convenciones permanecen satisfechas. Utilizando esta operación de substitución podemos probar:

Proposición 1 *Con las baldosas LK, RK, LD, RD se puede embaldosar una región finita arbitrariamente grande del plano.*

Prueba: Decimos que se puede embaldosar una región finita del plano, si existe un embaldosamiento, tal que cada punto de la región está cubierta por una baldosa. Comenzemos con un triángulo de cualquier tipo. Repetimos operaciones de substitución y ampliación. Después de cada substitución ampliamos la configuración obtenida en razón de $\psi^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq 1,618$ para obtener un embaldosamiento que consiste de baldosas de tamaño original. Si lo repetimos suficientes veces obtenemos un embaldosamiento de un triángulo arbitrariamente grande.

La siguiente proposición vale para cada conjunto finito de baldosas.

Proposición 2 *Si se puede embaldosar cada región finita, se puede embaldosar todo el plano.*

Prueba: Fijemos $k > 0$ y el cuadrado $[-k,k]^2$ con lados $2k$ y centro en el origen del plano. Para cada $n > k$ considere un embaldosamiento del cuadrado $[-n,n]^2$ y miremos su intersección con $[-k,k]^2$. Como hay solamente un número finito de embaldosamientos de $[-k,k]^2$, algún embaldosamiento debe ocurrir un número infinito de veces. Designemos este E_k. Es un embaldosamiento de $[-k,k]^2$, que se puede extender arbitrariamente. Consideremos entonces para cada $n > k+1$ un embaldosamiento de $[-n,n]^2$, que coincide con E_k en $[-k,k]^2$ y miramos su intersección con el cuadrado $[-k-1,k+1]^2$. Designemos como E_{k+1} aquel que ocurre un número infinito de veces. De esta manera construimos un sucesión de embaldosamientos $E_k, E_{k+1}, \ldots$, y cada uno de ellos extiende el precedente. La unión de todos E_n es un embaldosamiento de todo el plano.

Hemos probado, que con las baldosas LK,RK,LD,RD se puede embaldosar todo el plano. Lo mismo se puede ver más directamente como en Fig. 8. Comenzemos con un triángulo, por ejemplo con el triángulo LK más chico de Fig. 8. El triángulo LK aparece tres veces en Fig 7, como parte de LK, RK y RD. Elegimos una de estas posibilidades, por ejemplo RK, y colocamos alrededor del original LK dos triángulos RD,RK para obtener RK.

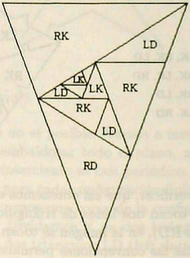

Figura 8

Repetimos este procedimiento. Alrededor del recién construido RK, colocamos LD y LK del mismo tamaño para obtener LK de otro nivel más grande. También dividimos nuevos colocados LD y LK en triángulos chicos para que tengamos embaldosamiento de baldosas del mismo tamaño. En el paso siguiente colocamos bajo de LK dos triángulos RK, LD para obtener un triángulo más grande. De esta manera embaldosamos todo el plano.

La operación de substitución es biyectiva. Si tenemos un embaldosamiento de todo el plano podemos combinar los triángulos de manera única en triángulos de nivel siguiente. Mostremos primero, que triángulos LD,RD no se pueden tocar con su lado de incisión triangular. Si ocurre esta configuración (ver Fig. 9),

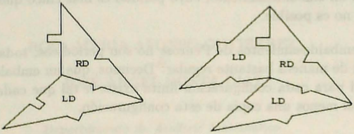

Figura 9

la única manera de extender el lado con incisión cuadrada de RD es con un otro LD, y esta configuración (Fig. 9 a la derecha) no se puede extender más. El lado corto de LD con incisión triangular puede tocar entonces sólamente el lado corto de RK. Entonces, en cada embaldosamiento podemos unir cada LD con RK y cada RD con LK. De este manera obtenemos un embaldosamiento en LD, RD, LD y RD. Quedan algunos triángulos chicos que aún no han sido unidos. Un LK que no es unido con un RD debe tocar con su lado chico un RK como en Fig 10.

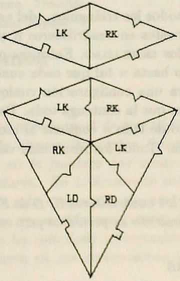

Figura 10

Esta configuracón de LK, RK se puede extender de manera única en la configuración de Fig. 10 a la derecha, entonces cada LK se puede unir con un único LD para formar un LK y cada RK se puede unir con un único RD para formar un RK. De esta manera todos los triángulos chicos forman parte de un triángulo grande.

Proposición 3 *Ningún embaldosamiento del plano de LK,RK,LD,RD es periódico.*

Prueba: Supongamos, que existe un embaldosamiento con periodo $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$. Unimos todos los triángulos en triángulos más grandes y después reducimos este embaldosamiento obtenido en razón áurea ψ. Obtenemos un nuevo embaldosamiento (con las mismas baldosas) con periodo $\psi \cdot u$. Si repetimos esta operación algunas veces obtenemos un embaldosamiento, cuyo periodo es más chico que el tamaño de baldosas, lo que no es posible.

Aunque los embaldosamientos de Penrose no son periódicos, todas sus configuraciones ocurren de manera bastante regular. Decimos, que un embaldosamiento es casi periódico, si para cada configuración finita existe n tal que cada cuadrado de lado n contiene al menos una copia de esta configuración.

Proposición 4 *Cada embaldosamiento de todo el plano con LK,RK,LD,RD es casi periódico.*

Prueba: Unimos todos los triángulos del embaldosamiento en los triángulos más grandes y unimos estos en cuadriláteros K y D. Cada cuadrilátero K y D contiene todos los triángulos LK,RK,LD,RD. Entonces para una configuración que consiste de un triángulo chico basta n tal que cada cuadrado de lado n contenga al menos un cuadrilatero. Para una configuración cualquiera basta encontrar un triángulo de nivel bastante alto, que la contenga toda. Para K y D de nivel siguiente existe n tal que cada cuadrado de lado n contiene al menos un K o un D, entonces también la configuración dada. Todos los resultados valen también para cuadriláteros de Fig. 5.

Teorema 1 *Con los cuadriláteros K, D de Fig. 5 se puede embaldosar todo el plano, ningún embaldosamiento es periódico pero cada embaldosamiento es casi periódico.*

Referencias

[1] B. Grünbaum, G. C. Shephard: *Tilings and Patterns.* Freeman, New York, 1989.