Cubo Matemática Educacional
Vol. 3., N°1, ENERO 2001

Algunas ecuaciones relacionadas con el número de oro

Diómedes Bárcenas[1]

Departamento de Matemática
Universidad de los Andes
Mérida 5101, Venezuela
barcenas@ciens.ula.ve

En la historia del Arte y de la Ciencia, nos encontramos con una amplia literatura referente a la razón áurea. En esta literatura abundan las referencias al diseño en la Naturaleza y en las Artes usando la razón áurea, así como interesantes aspectos que muestran las relaciones entre ella y algunos polígonos regulares como es el caso del pentágono y el decágono; sin dejar de mencionarse sus relaciones con otros objetos matemáticos como es el caso de la sucesión de Fibonacci y en efecto, existen algunos aspectos matemáticos de la mencionada razón que la colocan en el lugar privilegiado que hoy ocupa.

La historia y la fama de la razón áurea hunden sus raíces en la más remota antigüedad ya que aparece en la Arquitectura egipcia y jugó un papel protagónico en la filosofía de la escuela de Pitágoras. Tan pronto como los pitagóricos asumieron el liderazgo de la filosofía griega, adoptaron como emblema la estrella de cinco puntas; figura geométrica obtenida al prolongar los lados de un pentágono regular, polígono que exhibe numerosas relaciones con la razón áurea; hecho que indujo a Miguel de Guzmán a recoger la opinión, en sus "Aventuras Matemáticas" [4], que ésta (y no la diagonal del cuadrado) fue el principio del fin de la escuela pitagórica, lo que nos parece verosímil porque la razón áurea origina, como veremos más adelante, un número irracional unido al pitagorismo.

La hoy conocida razón áurea aparece en la proposición 11 del libro II de los Elementos de Euclides [5], en relación a la forma de dividir un segmento en media y extrema razón. Esto significa hallar un punto C en un segmento $\overline{AB}$ de forma tal que

[1]Auspiciado por el CDCHT-ULA mediante el proyecto C-840-B-97.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC};$$

hecho que conduce a la ecuación algebraica

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad , \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}.$$

El hecho de que la proposición 30 del libro VI de los Elementos de Euclides también haga referencia a la razón áurea da una idea de su importancia para los antiguos griegos. En cuanto al símbolo φ, éste aparece en el siglo XIX para honrar a Fidias, arquitecto griego quien al parecer usó la razón áurea en los diseños del Partenón.

El número $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ se conoce como el *número de oro* designación atribuida a Leonardo da Vinci. Más tarde Kepler afirmaría que la geometría (euclídea) consta de dos joyas: El Teorema de Pitágoras y dividir un segmento en media y extrema razón.

Las propiedades matemáticas del número de oro y algunos números relacionados con él, han llenado volúmenes, cosa que no parece además detenerse por ahora. Entre estos volúmenes se encuentra "La Divina Proporción" [10] escrito por Luca Pacioli, matemático italiano del Renacimiento que comienza por enumerar la riqueza de las propiedades de la proporción áurea y se detiene en la número trece para, según sus palabras, rendir tributo al Divino Maestro y sus Doce Discípulos; razón por la cual la proporción áurea también se conoce como la Divina Proporción.

Más acá del misticismo y rozando aspectos más teóricos desde el punto de vista matemático, Le Corbusier, famoso arquitecto del siglo XX, adoptó la razón áurea para el diseño de El Modulor [9].

El hecho de que el número de oro φ sea tal que φ y $-\frac{1}{\varphi}$ sean raíces de la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

implica, por propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado, que

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1$$

lo cual a su vez implica (usemos Inducción Matemática si queremos percatarnos) que φ es el único número real que satisface la relación

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}. \qquad (*)$$

De esta forma vemos fácilmente las relaciones entre φ y la sucesión de Fibonacci; una sucesión que nació en la Edad Media con vida imperecedera. Si nos concentramos en la ecuación (*), rápidamente vemos que $(\varphi^n)_{n\in N}$ es una sucesión de Fibonacci (una sucesión en la cual son dados los dos primeros términos y cada término a partir del tercero, se obtiene mediante la ley de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$); pero podemos ir un poquito más lejos: se puede demostrar que si (a_n) es una sucesión de Fibonacci, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \varphi;$$

y podemos llegar aún más lejos si seguimos los pasos de Scholfield en "Las Proporciones en Arquitectura" [11]: El número de oro es el número más pequeño de la familia

$$\{\alpha : \alpha \text{ es raíz positiva de la ecuación } x^2 - nx - 1 = 0, \quad n \in N\}.$$

Cada miembro de esta familia satisface la condición de que si $\{a_k\}$ es una sucesión formada mediante la ley de recurrencia $a_k = na_{k-1} + a_{k-2}$ para $k \geq 3$ y $n \in N$ fijo, entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \alpha$$

donde α es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - nx - 1 = 0$.

El número φ no es sólo el más pequeño sino el más importante de la familia; siguiéndole en importancia el número $\theta = 1 + \sqrt{2}$ el cual es raíz de la ecuación $x^2 - 2x - 1 = 0$ y está relacionado con la sucesión de Pell (una sucesión donde los dos primeros términos son dados y a partir del tercero se satisface la ley de recurrencia $a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}$). El número θ aparece también al estudiar las relaciones entre el lado de un octógono regular y el radio de la circunferencia que lo circunscribe.

Debido a que la solución positiva de la ecuación $x^2 - nx - 1 = 0$ es creciente para $n \in N$, tenemos que los dos números más importantes de la familia son precisamente los más pequeños, es decir, φ y θ; hecho que nos consuela con el pensamiento de que ser pequeño también tiene sus ventajas.

Las maravillosas propiedades del número de oro no se limitan al Algebra y la Geometría Elemental; de la que una buena antología la constituye *The Divine*

Proportion por H.E. Huntley [6], donde además se nos notifica que el número de oro también aparece en temas del Análisis ya que si a es un número real tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n + (n+a)^n}{(n+2a)^n} = 1$$

entonces, $\exp(a) = \varphi$ ([6], p.110).

Otra ecuación con solución áurea es la siguiente

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^r)^r} = 1$$

con $r > 0$ si y sólo si $r = \varphi$; cuya demostración puede verse en [1]; incluso hay artículos recientes que relacionan al número de oro con el conjunto de Cantor [8].

Son tantas las incursiones del número de oro en el quehacer matemático que razón tuvo Pacioli en buscarse un pretexto para detenerse una vez que comenzó a estudiar sus innumerables propiedades.

La fórmula

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \quad n \in Z,$$

conduce rápidamente a concluir que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k} = \varphi \quad \text{y} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\varphi^k} = 1$$

hechos que como observa Kapparaff ([7]) relaciona a φ con el número 2 puesto que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

siendo además φ y 2 los únicos números que satisfacen estas relaciones.

Consideraciones como éstas nos conducen a plantearnos el problema siguiente: Sea $n \in N$. ¿Existe solución para la ecuación

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^k} = 1? \tag{1}$$

Cálculos sencillos nos conducen a la siguiente conclusión: Las soluciones positivas de (1) (si existen) coinciden con las soluciones positivas de (2)

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{x^k} = x \tag{2}$$

las cuales a su vez coinciden con la soluciones positivas de la ecuación

$$x^n - x^{n-1} - 1 = 0. \tag{3}$$

Si en la ecuación (1) hacemos el cambio de variable $\frac{1}{x} = y$ vemos que α es solución de la ecuación (1) si y sólo si $\frac{1}{\alpha}$ es solución de la ecuación

$$\sum_{k=n}^{\infty} y^k = 1 \tag{4}$$

Información que se traduce a su vez en la siguiente: β es solución de (4) si y sólo si β es solución positiva de

$$x^n + x - 1 = 0 \tag{5}$$

si y sólo si β es solución de

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x \tag{6}$$

Resultados que se obtienen al tomar en consideración el carácter de serie de potencia de (1),(2),(4) y (5) y los respectivos criterios de convergencia.

Lo hasta aquí expresado se rescata como sigue:

Teorema 1: *Para $\alpha > 0$ las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) α es solución de (1)

(b) α es solución de (2)

(c) α es solución positiva de (3)

(d) $\frac{1}{\alpha}$ es solución de (4)

(e) $\frac{1}{\alpha}$ *es solución de (5)*

(f) $\frac{1}{\alpha}$ *es solución positiva de (6)*

Una vez expresadas estas equivalencias entre las diferentes ecuaciones en consideración, estamos listos para estudiar la existencia y unicidad de las soluciones.

Teorema 2: *Para cada $n \in N$ existe una única solución positiva de las ecuaciones (1)-(6). Estas soluciones son mayores que 1 en los casos (1)-(3) y menores que 1 en los casos (4)-(6).*

Demostración Comenzando con la existencia, al considerar el polinomio $p(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ vemos que $p(1) < 0$ y $p(2) \geq 0$; lo cual implica que nuestras ecuaciones (1)-(3) tienen solución en $(1, 2]$ y ello nos lleva a la existencia de solución en $[\frac{1}{2}, 1)$ para las respectivas ecuaciones (4)-(6).

Para demostrar la unicidad, apelamos a la ecuación (4). Salvo multiplicidad, podemos suponer que $\beta > \gamma$ y así vemos que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \beta^k = \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^k$$

si y sólo si

$$\sum_{k=n}^{\infty} \beta^k - \sum_{k=n}^{\infty} \gamma^k = 0$$

si y sólo si

$$\sum_{k=n}^{\infty} \beta^k - \gamma^k = 0$$

si y sólo si

$$\beta^k = \gamma^k$$

lo cual contradice nuestra suposición. ■

Teorema 3:

(a) *Las soluciones positivas de (1)-(3) decrecen en n.*

(b) *Las soluciones positivas de (4)-(6) crecen en n.*

Demostración Debido a que α es solución positiva de (1)-(3) si y sólo si $\dfrac{1}{\alpha}$ lo es de (4)-(6) y que α es creciente si y solamente si $\frac{1}{\alpha}$ es decreciente, basta con trabajar la parte (b), de forma que si α y β son las respectivas soluciones de

$$\sum_{k=n}^{\infty} x^k = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = 1$$

entonces

$$\sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta^k = 0$$

y así

$$\alpha^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha^k - \beta^k) = 0$$

si y sólo si

$$\beta^j > \alpha^j \qquad \text{para algún } j \geq n+1$$

si y sólo si

$$\beta > \alpha$$

luego, las soluciones de (4)-(6) son crecientes. ■

Otra propiedad de las ecuaciones (1)-(6) se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 4: *Las soluciones positivas de (1)-(6) tienen al número 1 como punto de acumulación.*

Demostración Si escribimos la ecuación (3) en la forma $x^n - x^{n-1} = 1$ y tomamos $a > 1$, tenemos que $a^n - a^{n-1} = a^{n-1}(a-1) > 1$ para n suficientemente grande y para tal n tenemos que la única solución positiva de (1)-(3) se encuentra en el intervalo $(1, a)$ lo cual significa que la única solución positiva de (4)-(6) se encuentra en $(\frac{1}{a}, 1)$.

Ahora bien, si $a - 1 < \epsilon$ para un ϵ dado, entonces

$$1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} < \frac{\epsilon}{a} < \epsilon$$

lo cual muestra que 1 es punto de acumulación de las soluciones positivas de (4)-(6).

Como las soluciones aparecidas en el teorema precedente son monótonas, podemos afirmar que la sucesión de las soluciones en n de cualquiera de las ecuaciones (1)-(6) tiende a 1 cuando n tiende a infinito. ■

Ahora nuestro próximo teorema.

Teorema 5: *Si* $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ *tiene una raíz negativa* α *entonces* n *es par y* $|\alpha| < 1$.

Demostración Esto es así porque si n es impar, entonces $(n-1)$ es par y expresando nuestra ecuación en la forma $x^n - x^{n-1} = 1$ vemos que

$$x^{n-1}(x-1) = 1 \tag{7}$$

y cualquier solución negativa de esta ecuación conduce a una contradicción con (3) porque siendo $(n-1)$ par, x^{n-1} es positivo para todo número real x distinto de cero. Así que si α es raíz negativa de (3), entonces n es par y en consecuencia $\alpha^n > 0$ y $\alpha^{n-1} < 0$; de donde $0 < \alpha^n = \alpha^{n-1} + 1 < 1$ y por tanto $|\alpha| < 1$. ■

Este resultado tiene su consecuencia para las ecuaciones (1) y (2), la cual es que si α es solución negativa de (3), entonces

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k}$$

diverge puesto que una serie de potencias converge si su razón es menor que 1 en valor absoluto y este no es el caso de $\frac{1}{\alpha}$ cuando $|\alpha| < 1$.

Las raíces negativas de (3) también son únicas, (bueno, esto salvo multiplicidad, pero no pasará mucho tiempo hasta convencernos de que estas raíces tienen multiplicidad 1).

En efecto, hemos visto que si (3) tiene solución negativa entonces n es par; pero si α y β son raíces negativas de (3), entonces $\alpha^n - \alpha^{n-1} = \beta^n - \beta^{n-1}$ si y sólo si

$$\alpha^n - \beta^n = \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \tag{8}$$

No hay pérdida de generalidad al suponer que $|\alpha| > |\beta|$, en cuyo caso tendremos, por ser n par, que $\alpha^n - \beta^n > 0$ y esto sería equivalente por (8) a que $\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} > 0$ y como α y β son números negativos y $(n-1)$ es impar, resulta que α^{n-1} y β^{n-1} son números negativos de donde se concluye que $|\alpha|^{n-1} < |\beta|^{n-1}$ y por tanto $|\alpha| < |\beta|$ en contra de lo que hemos supuesto. De manera que las soluciones negativas (y las positivas por el Teorema 2) de (3) son únicas salvo multiplicidad.

Pero lo de la multiplicidad de las soluciones de (3) no constituye un gran escollo:

Teorema 6: *Las soluciones de (3) tienen multiplicidad simple.*

Demostración Si α es raíz múltiple de (3), entonces $n \geq 4$ y

$$x^n - x^{n-1} - 1 = (x-\alpha)^2 p(x)$$

donde p es un polinomio en la variable x; luego, derivando obtenemos que

$$nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} = 2(x-\alpha)p(x) + (x-\alpha)^2 p'(x) = (x-\alpha)(2p(x) + (x-\alpha)p'(x))$$

y así α es solución de la ecuación $nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} = 0$ y por ser $n \geq 4$, sustituyendo x por α y dividiendo entre α^{n-2} se tiene que

$$n\alpha = n - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{n-1}{n} \Rightarrow 0 < \alpha < 1$$

lo cual es imposible. ∎

Nos parece natural formularnos la siguiente pregunta: Dado que si n es par la ecuación $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$ tiene una solución negativa, digamos α, con $|\alpha| < 1$, ¿Será posible la validez de

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha|^k = 1 \tag{9}$$

La respuesta es algo sorprendente pues si para algún n (9) tiene solución, tal n es par y

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\alpha|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n |\alpha|^k = \alpha^n \frac{1}{1+\alpha} = 1$$

lo cual implica que

$$\alpha^{n-1} = \frac{1+\alpha}{\alpha}. \tag{10}$$

Tomando en cuenta que α es solución de $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$, tenemos que

$$\alpha^{n-1}(\alpha - 1) = 1 \Rightarrow \alpha^{n-1} = \frac{1}{\alpha - 1} \tag{11}$$

y comparando (10) y (11) vemos que

$$\frac{1+\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

lo cual no es más que la ecuación de segundo grado $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ y esto implica que siendo α un número negativo, necesariamente $\alpha = -\frac{1}{\varphi}$; con $n = 2$. Esto significa que nuestro problema tiene solución si y sólo si $n = 2$, en cuyo caso la solución es igual a $-\frac{1}{\varphi}$.

Por otra parte, si α es solución negativa de la ecuación $x^n + x - 1 = 0$ y $|\alpha|$ es solución de $x^n - x^{n-1} - 1 = 0$, entonces por un lado tenemos que

$$\alpha^n = 1 - \alpha \tag{12}$$

por ser α solución de (6), mientras que la equivalencia entre las soluciones positivas de (1) y (3) muestran que de ser α solución de (3), entonces

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{|\alpha|^k} = 1$$

lo que implica que

$$\frac{1}{\alpha^n}\frac{1}{1-\frac{1}{|\alpha|}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^n}\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^n}\frac{1}{\frac{1+\alpha}{\alpha}} = 1 \Rightarrow \alpha^n = \frac{\alpha}{1+\alpha}. \tag{13}$$

Comparando (12) y (13) vemos que

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = 1 - \alpha$$

de donde

$$\alpha = 1 - \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow n = 2 \text{ y } \alpha = -\varphi.$$

Estamos interesados en la unicidad de las soluciones negativas de (6), en cuyo caso n es par.

Si α y β son soluciones negativas de la ecuación (6) con $\alpha \neq \beta$, entonces

$$\alpha + \alpha^n = \beta + \beta^n$$

por tanto,

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = -1$$

de donde,

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \alpha^{n-3}\beta^2 + \cdots + \beta^{n-1} = -1;$$

lo cual es imposible porque cada uno de los sumandos de la izquierda es un número negativo. En efecto, si $m + k = n - 1$ se tiene que $\alpha^m \beta^k < -1$ pues tanto α como β son menores que -1 y $n - 1$ es un número impar.

Hemos visto que α es solución positiva de la ecuación

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{x^k} = 1$$

si y sólo si α es solución de

$$x^n - x^{n-1} = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha^{n-1}};$$

lo que conduce a la siguiente moraleja: Las potencias de las soluciones de la ecuación

$$x^n - x^{n-1} - 1 = 0$$

están en una sucesión de Fibonacci si y sólo si $n = 2$; en cuyo caso las soluciones coinciden con el número de oro; en general, no es difícil percatarse de que las soluciones α de (1) satisfacen la ley de recurrencia $\alpha^k = \alpha^{k-1} + \alpha^{k-n}$.

Finalizamos nuestra exposición con el siguiente teorema.

Teorema 7: *La solución positiva α de (1)-(6) es racional si y sólo si $n = 1$; en tal caso $\alpha = 2$ ó $\alpha = \frac{1}{2}$ según el caso.*

Demostración Consideremos la ecuación $x^n + x - 1 = 0$; y sea α la correspondiente raíz positiva. En este caso

$$\alpha = 1 - \alpha^n.$$

Si α es racional, entonces se puede expresar en la forma $\alpha = \dfrac{a}{b}$ con $0 < a < b$; a y b enteros y primos entre sí. Luego, la siguiente relación es satisfecha:

$$\frac{a}{b} = 1 - \frac{a^n}{b^n} \Longleftrightarrow a = b - \frac{a^n}{b^{n-1}} \Longleftrightarrow b - a = \frac{a^n}{b^{n-1}};$$

lo cual implica que $\frac{a^n}{b^{n-1}}$ es entero y esto sólo ocurre si $b^{n-1} = 1$; pues en caso contrario, siendo que b^{n-1} divide a a^n, entonces todo factor primo de b divide a a; lo que contradice que a y b son primos entre sí, de forma que $b^{n-1} = 1$; y como a y b son enteros positivos con $a < b$, necesariamente $n - 1 = 0$ y así $n = 1$.

RECONOCIMIENTO

La idea de escribir este artículo surgió durante la quietud de un reposo médico; así, coincido con Miguel de Guzmán en que no siempre es tan malo enfermarse.

Agradecemos a la profesora María Luisa Colasante las conversaciones durante la redacción de este artículo.

Referencias

[1] **Bradley D. (proposer)**, *Another Equation with a Golden Solution, Problem and Solution*, Amer. Math. Monthly, 675, (1998).

[2] **Ghyka M.**, *The Geometry of Art and Life*, Dover, New York (1946).

[3] **Ghyka M.**, *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Poseidón, Buenos Aires (1954).

[4] **Guzmán M. de**, *Aventuras Matemáticas*, Labor, Barcelona (1986).

[5] **Heath T. L.**, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge University Press, Cambridge (1928).

[6] **Huntley H.**, *The Divine Proportion: A study in Mathematical Beauty*, Dover, New York (1970).

[7] **Kraft R.L.**, *A Golden Cantor Set*, American Math. Monthly, 718-725 (1998).

[8] **Kappraff J., Conections**, *The Geometric Bridge betwen Art and Science*, Mc Graw Hill, New York (1991).

[9] **Le Corbusier**, *El Modulor*, Poseidón, Buenos Aires (1943).

[10] **Pacioli L.**, *La Divina Proporción*, Losada, Buenos Aires (1946).

[11] **Schofield P. H.**, *Teoría de las Proporciones en Arquitectura*, Labor, Barcelona (1971).