Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE SEMIGRUPOS*

Hernán Henríquez M.
Universidad de Santiago. Departamento de Matemática.
Casilla 307, Correo 2. Santiago.

Resumen

En este trabajo se desarrollan los aspectos esenciales del problema de estabilidad asintótica de sistemas lineales en espacios de Banach. La teoría general se ilustra con varias aplicaciones, incluyendo una aplicación a la estabilización de sistemas de control distribuidos, algunos resultados relativos a la estabilidad asintótica de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales funcionales lineales con retardo finito y una caracterización de la estabilidad asintótica de familias de sistemas.

1. Introducción.

Es bien conocido que la estabilidad asintótica de un sistema es una característica relevante del sistema. Por este motivo, el estudio de la estabilidad asintótica de

* Este trabajo fue financiado parcialmente por el proyecto DICYT-USACH 04-9633HM.

sistemas lineales constituye un tópico de gran interés, tanto desde un punto de vista aplicado como teórico.

Estas notas, tienen como objetivo presentar la teoría básica relativa al problema de comportamiento asintótico de semigrupos. Específicamente, si A es un operador lineal definido en un espacio de Banach de modo que el problema de Cauchy abstracto

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

está bien planteado, se establecerán condiciones para asegurar que su solución $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, para cualquier condición inicial $x(0) = x_0$.

Consideremos inicialmente un sistema cuya evolución se describe por la ecuación diferencial lineal (1.1) donde A es una matriz de $n \times n$. Si para $t = 0$ este sistema es llevado a un estado $x(0) = x_0$, el comportamiento futuro del sistema se determina por la solución de la ecuación diferencial (1.1), que como sabemos es

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0.$$

El problema de la estabilidad asintótica del sistema (1.1) consiste en determinar bajo qué condiciones la solución $x(t)$ converge a cero cuando $t \to +\infty$. El siguiente resultado (Hirsch y Smale [15]) es bien conocido.

Teorema 1.1 *Sea A una matriz real o compleja de $n \times n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La solución $x(t) \to 0$, $t \to \infty$, para todo $x_0 \in \mathbb{C}^n$.*

(b) *Los valores propios de A tienen parte real negativa.*

(c) *Existen constantes $M \geq 1$ y $\omega < 0$ tal que $\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$.*

(d) *Para cualquier matriz auto-adjunta definida positiva Q la ecuación*

$$A^*P + PA = -Q \tag{1.2}$$

tiene una única solución P auto-adjunta y definida positiva.

Se deduce de este resultado que para estos sistemas la estabilidad asintótica es una propiedad de la matriz A y no de cada solución particular. Además, el conjunto de los valores propios de A tiene una figuración relevante. Este conjunto se llama espectro de A y lo denotaremos por $\sigma(A)$. Específicamente, la estabilidad asintótica depende de la constante $s(A) = \text{máx}\{Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

De las propiedades de las normas en matrices, se obtiene la siguiente igualdad que relaciona los valores propios de A con la constante ω del Teorema 1.1.

Proposición 1.1 *En las condiciones precedentes* $s(A) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|e^{At}\|}{t}$ *y si* $\omega > s(A)$, *entonces existe una constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|e^{At}\| \leq Me^{\omega t}$, *para todo* $t \geq 0$.

La ecuación matricial (1.2), conocida como ecuación de Liapunov, es poco utilizada para verificar la estabilidad de una matriz pero tiene gran importancia conceptual en relación con problemas de optimización.

Retornando a la ecuación (1.1), cuando A no es una matriz sino que un operador lineal definido en un espacio de Banach, para definir lo que entenderemos por solución de la ecuación necesitamos del concepto de semigrupo de operadores. Por este motivo, la sección siguiente está dedicada a introducir el concepto de semigrupo, mientras que en la sección 3 estudiaremos las relaciones existentes entre el espectro del semigrupo y de su generador infinitesimal. Finalmente, en la sección 4 mostraremos varias aplicaciones de la teoría, entre ellas una aplicación a la estabilización de sistemas de control, una aplicación al estudio de la estabilidad asintótica de ecuaciones diferenciales funcionales lineales con retardo acotado, una aplicación a la estabilidad asintótica de familias de sistemas lineales y una aplicación a la teoría de semigrupos positivos.

La mayoría de las notaciones que utilizaremos son las usuales en análisis funcional. También, para simplificar algunos enunciados. siempre consideraremos como escalares a los números complejos. Si X es un espacio de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}(X)$ al espacio de los operadores lineales acotados de X en X, dotado con la norma de operadores y representaremos por $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ al espacio dual de X. Si

$A : D(A) \subseteq X \to X$ es un operador lineal denotaremos por $\rho(A)$, llamado conjunto resolvente de A, al conjunto formado por los números $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A$ tiene inversa en $\mathcal{L}(X)$. En este caso, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ se llama operador resolvente de A. Además, el conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ se llama espectro de A. Cuando el dominio de A es denso denotaremos por A' el operador dual o adjunto de A. Si $T \in \mathcal{L}(X)$ representaremos por $r_e(T)$ al radio espectral de T. Finalmente, utilizaremos $\mathcal{R}$ para indicar la imagen de un operador.

2. Semigrupos fuertemente continuos de operadores lineales.

Como hemos mencionado en la introducción, el concepto fundamental para estudiar el problema de Cauccy abstracto es la noción de semigrupo de operadores. Por este motivo dedicamos esta sección a presentar los aspectos esenciales de la teoría de semigrupos. La mayoría de los resultados incluidos se encuentran en Nagel [18] o Pazy [20].

En esta sección como también en las siguientes denotaremos por X a un espacio de Banach, con norma $\|\cdot\|$.

Definición 2.1 *Llamaremos semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados (abreviado, semigrupo) en X a una aplicación $T : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ que satisface las siguientes condiciones:*

(a) $T(t+s) = T(t) \circ T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$;

(b) $T(0) = I$;

(c) *La función* $t \to T(t)x$ *es continua, para cada* $x \in X$.

Para relacionar con la sección anterior observemos que si X un espacio normado de dimensión finita y $A : X \to X$ una aplicación lineal, entonces $T(t) := e^{At}$ es un semigrupo fuertemente continuo. Más aún, para cualquier espacio X, si $A \in \mathcal{L}(X)$ entonces la exponencial e^{At} es un semigrupo fuertemente continuo.

Se deduce fácilmente utilizando el Principio del Acotamiento Uniforme la siguiente propiedad de acotamiento exponencial.

Proposición 2.1 *Si* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *es un semigrupo entonces existen constantes* $M \geq 1$ *y* $\omega \in \mathbf{R}$ *tal que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{2.1}$$

En el resto de esta sección supondremos que el semigrupo T y las constantes M y ω verifican la desigualdad anterior. El semigrupo T se llama uniformemente acotado si es posible escoger $\omega = 0$ y contractivo si es posible escoger $\omega = 0$ y $M = 1$. Utilizando la subaditividad de $\ln \|T(t)\|$ se obtiene un resultado más preciso.

Proposición 2.2 *Si* $T(\cdot)$ *es un semigrupo, entonces existe*

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t},$$

y $-\infty \leq \omega_0(T) < \infty$. *Además,*

$$r_e(T(t)) = e^{\omega_0(T)\, t}, \quad t > 0.$$

La constante $\omega_0(T)$ determina el comportamiento asintótico del semigrupo T, por lo que se justifica la siguiente terminología.

Definición 2.2 *Llamaremos tipo (o constante de crecimiento) del semigrupo* $T(\cdot)$ *a la constante* $\omega_0(T)$.

Se deduce de la Proposición 2.2 que para todo $\omega > \omega_0(T)$ existe una constante M para la cual se satisface la desigualdad (2.1).

Definición 2.3 *Se llama generador infinitesimal de un semigrupo* $\{T(t) : t \geq 0\}$ *al operador* $A : D(A) \to X$ *definido mediante la expresión*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

en todos aquellos elementos $x \in X$ *donde el límite existe.*

Algunas propiedades del generador infinitesimal son las siguientes:

Proposición 2.3 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo en* X *con generador infinitesimal* A *tal que* $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$, $t \ge 0$. *Entonces:*

(a) *El operador* A *es lineal, cerrado y su dominio* $D(A)$ *es denso en* X.

(b) *Si* $x \in D(A)$ *entonces la función* $T(t)x$ *es continuamente derivable para* $t \ge 0$, $T(t)x \in D(A)$ *y*

$$\frac{dT(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(c) *Para todo* $x \in X$ *y* $t \ge 0$, $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ *y*

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)x\,ds.$$

Además, si $x \in D(A)$, *entonces*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

(d) *Si* $Re(\lambda) > \omega$ *entonces* $\lambda \in \rho(A)$,

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad x \in X$$

y

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{M}{Re(\lambda) - \omega}.$$

La propiedad (d) establece que $R(\lambda, A)x$ es la transformada de Laplace de $T(\cdot)x$. Usualmente es necesario considerar algunos operadores construidos a partir de A. El resultado esencial es el siguiente.

Proposición 2.4 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo en* X *con generador infinitesimal* A. *Entonces:*

(a) *Para todo operador lineal acotado* $B \in \mathcal{L}(X)$, *el operador* $A + B$ *es generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de operadores en* X.

(b) *Para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$, *el operador* $A - \lambda I$ *es generador infinitesimal del semigrupo* $e^{-\lambda t}T(t)$.

(c) *Para todo $\alpha > 0$, el operador αA es generador infinitesimal del semigrupo $T(\alpha t)$.*

Como consecuencia de estos dos resultados se obtiene una propiedad que utilizaremos frecuentemente.

Corolario 2.1 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X con generador infinitesimal A. Entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in X$, $\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x\,ds \in D(A)$, y*

$$T(t)x - e^{\lambda t}x = (A - \lambda I)\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x\,ds. \tag{2.2}$$

Si $T(t)$ es un semigrupo fuertemente continuo en X, la aplicación $[0,\infty) \to \mathcal{L}(X')$, $t \to T(t)'$ tiene las propiedades algebraicas de un semigrupo en el espacio dual X' pero, en general, no es fuertemente continua. Sin embargo, esto no ocurre cuando X es un espacio de Banach reflexivo y, en particular, un espacio de Hilbert. Por su interés en el desarrollo que sigue estableceremos formalmente, aunque sin demostración, esta última propiedad.

Proposición 2.5 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en X con generador infinitesimal A. Entonces $T(\cdot)'$ es un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales en X' con generador infinitesimal A'.*

La Proposición 2.3 podemos reinterpretarla en términos de ecuaciones diferenciales. Llamaremos problema de Cauchy abstracto al problema de valores iniciales

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0, \tag{2.3}$$

donde $x(t) \in X$. De la Proposición 2.3 parte (b), se deduce que si A es el generador infinitesimal de un semigrupo $T(\cdot)$ en X y $x_0 \in D(A)$, entonces la función $x(t) = T(t)x_0$ es una solución del problema (2.3). Puede mostrarse también que esta es la única solución de (2.3).

El problema de la estabilidad asintótica en espacios de Banach es más complicado que en espacios de dimensión finita, ya que en este caso surgen varios conceptos no equivalentes de estabilidad, los cuales son utilizados a menudo. Los principales de ellos son los siguientes.

Definición 2.4 *Un semigrupo* $T(\cdot)$ *en* X *se llama:*

(a) *Uniformemente estable si* $\|T(t)\| \to 0, \;\; t \to +\infty.$

(b) *Fuertemente estable si* $T(t)x \to 0, \;\; t \to +\infty,$ *para todo* $x \in X.$

(c) *Débilmente estable si* $< x', T(t)x > \to 0, \;\; t \to +\infty,$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $x' \in X'.$

Se puede verificar fácilmente que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ y que todo semigrupo débilmente estable es uniformemente acotado. Además, estas tres clases de semigrupos son diferentes, lo que ilustraremos mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.1 Sea X el espacio $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ y $T(t)$ el operador definido por

$$T(t)f(\xi) := f(\xi + t), \quad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Entonces T es un semigrupo fuertemente continuo en X, conocido como semigrupo de traslaciones. Además, T es débilmente estable pero no es fuertemente estable. En efecto, si $f \in L^p(\mathbb{R})$ entonces $\|T(t)f\|_p = \|f(\xi+t)\|_p = \|f\|_p$ de modo que $T(t)f$ no converge a cero cuando $t \to \infty$. Se deduce también de la igualdad anterior que $\|T(t)\| = 1$, para todo $t \geq 0$. Sin embargo, T es débilmente estable; ya que si $g \in X' = L^q(\mathbb{R})$, con q exponente conjugado de p, entonces $< T(t)f, g > \to 0, \; t \to \infty$. En efecto, es fácil verificar que es suficiente mostrar esta propiedad cuando f y g pertenecen a subconjuntos densos de $L^p(\mathbb{R})$ y $L^q(\mathbb{R})$, respectivamente. Si escogemos f y g como funciones continuas con soporte compacto, la afirmación es consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Ejemplo 2.2 Sea X un espacio de Hilbert separable con base ortonormal $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión de números complejos y definamos el operador A por

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < x, e_n > e_n$$

en el dominio

$$D(A) = \left\{ x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \mid < x, e_n > |^2 < \infty \right\}.$$

Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) < \infty$ entonces A genera un semigrupo fuertemente continuo T definido por

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} < x, e_n > e_n.$$

Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) < 0$ entonces T es uniformemente estable. Sin embargo, en el caso en que cada $Re(\lambda_n) < 0$, $n \in \mathbb{N}$, y $\sup_{n \in \mathbb{N}} Re(\lambda_n) = 0$ entonces T es fuertemente estable pero no uniformemente estable. Por otra parte, si $Re(\lambda_n) \to -\infty$, $n \to \infty$, entonces $T(t)$ es un operador compacto, para $t > 0$, y si λ_n son números reales entonces $T(t)$ es auto-adjunto.

Un caso particular de este ejemplo se obtiene en el espacio $X = L^2([0, \pi])$ para el operador A definido por

$$Af(\xi) := f''(\xi)$$

con dominio

$$D(A) = \{ f \in L^2([0, \pi]) : f'' \in L^2([0, \pi]),\ f(0) = f(\pi) = 0 \}.$$

Es bien conocido que $\sigma(A)$ esta formado por los valores propios de A que son $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, con vectores propios normalizados $z_n(\xi) = (2/\pi)^{1/2} \sin(n\xi)$. El conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de X y si $f \in D(A)$ entonces $Af = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 < f, z_n > z_n$. De las observaciones previas deducimos que A genera un semigrupo compacto, auto-adjunto y uniformemente estable.

Hay numerosos trabajos dedicados a estudiar la estabilidad de semigrupos. En la mayoría de ellos se busca relacionar algún concepto de estabilidad con una propiedad espectral del generador infinitesimal del semigrupo. No pretendemos hacer una lista exhaustiva de referencias. Mencionemos solamente que para aspectos generales puede consultarse Nagel [18], Pritchard y Zabczyk [21] y van Neerven [19], resultados específicos para semigrupos positivos se encuentran en Nagel [18], Clement y Heijmans

[5] y Arendt [1] y para estabilidad fuerte puede consultarse Batty y Phóng [3] y sus referencias.

En nuestro trabajo estamos especialmente interesados en el concepto de estabilidad uniforme. La siguiente caracterización (Datko [7]) es fundamental.

Proposición 2.6 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo en X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *T es uniformemente estable;*

(b) *Existe $t_0 > 0$ tal que $\|T(t_0)\| < 1$;*

(c) *$\omega_0(T) < 0$;*

(d) *Existen constantes $C \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq Ce^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$;*

(e) *Existe $p \geq 1$ tal que $\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \, dt < \infty$, para todo $x \in X$.*

Demostración. Si $T(\cdot)$ es uniformemente estable, para t suficientemente grande $\|T(t)\| < 1$, lo cual muestra (b).

Si suponemos que se verifica la afirmación (b), utilizando la Proposición 2.2 podemos escribir

$$r_e(T(t_0)) = e^{\omega_0(T)\, t_0} < 1$$

de lo cual se deriva que $\omega_0(T) < 0$, de modo que (b) $\Rightarrow$ (c). La afirmación (c) $\Rightarrow$ (d) es consecuencia directa de la definición de $\omega_0(T)$ y la afirmación (d) $\Rightarrow$ (e) es inmediata. Para verificar que (e) $\Rightarrow$ (a), observemos inicialmente que $\Lambda : X \to L^p([0,\infty); X)$, $x \to T(\cdot)x$, es una aplicación lineal continua. La linealidad es evidente y para verificar la continuidad, por el Teorema del gráfico cerrado es suficiente con mostrar que Λ es una aplicación cerrada. Con este objeto supongamos que $x_n \to x$ y que $\Lambda(x_n) \to f$, $n \to \infty$. Es claro que $\Lambda(x_n)(t) \to \Lambda(x)(t)$, para cada $t \geq 0$ y, de las propiedades de los espacios L^p se deduce que existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $\Lambda(x_{n_k})$ converge puntualmente c.t.p. a f. Se concluye de esto que $\Lambda(x)(t) = f(t)$, c.t.p. En consecuencia,

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\int_0^\infty \|T(t)x\|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Mostremos a continuación que el semigrupo T es uniformemente acotado. Observemos previamente que si C_1 es una constante positiva tal que $\|T(u)\| \le C_1$, $0 \le u \le 1$ y $\|T(t)x\| = a > 0$, entonces

$$a = \|T(t)x\| = \|T(u)T(t-u)x\| \le C_1 \|T(t-u)x\|$$

de modo que $\|T(t-u)x\| \ge a/C_1$. Si suponemos que T no es acotado existiría una sucesión creciente no acotada t_n tal que $\|T(t_n)\| > n$. Por la definición de norma de operadores se deduce que existen $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, tal que $\|T(t_n)x_n\| \ge n$ y

$$\|\Lambda(x_n)\| \ge \left(\int_{t_n - 1}^{t_n} \|T(s)x_n\|^p \, ds \right)^{1/p} \ge \frac{n}{C_1}$$

lo cual contradice el resultado previo. Se deduce de esto que T es uniformemente acotado, es decir existe una constante $C \ge 0$ tal que $\|T(u)\| \le C$, para todo $u \ge 0$. Procediendo como en la observción inicial se deduce que para cada $t \ge 0$ y $x \in X$ se verifica que $\|T(u)x\| \ge \|T(t)x\|/C$, para todo $0 \le u \le t$. Si T no fuese uniformemente estable existiría $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente no acotada t_n tal que $\|T(t_n)\| > \varepsilon$. Por la definición de norma de operadores se deduce que existen $x_n \in X$, $\|x_n\| = 1$, tal que $\|T(t_n)x_n\| \ge \varepsilon$ y

$$\|\Lambda(x_n)\| \ge \left(\int_0^{t_n} \|T(s)x_n\|^p \, ds \right)^{1/p} \ge \frac{\varepsilon}{C} t_n^{1/p}$$

lo cual nuevamente contradice la continuidad de Λ. ■

Veremos posteriormente que este resultado puede generalizarse para incluir familias de semigrupos.

Esta caracterización tiene el inconveniente que requiere estimar el tipo del semigrupo pero usualmente solo se tiene información sobre el generador infinitesimal A. Comparando con el desarrollo efectuado para matrices esperamos poder relacionar la estabilidad del semigrupo con el espectro de A. Con este objeto definimos la **constante espectral**

$$s(A) := \sup\{Re(\lambda) \,:\, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

De la Proposición 2.3(d) se deduce que $s(A) \leq \omega_0(T)$. Si, tal como ocurre para la matriz exponencial, se mantuviera la igualdad $s(A) = \omega_0(T)$ entonces para concluir la estabilidad uniforme del semigrupo T bastaría verificar que $s(A) < 0$. Sin embargo, la igualdad anterior no es válida en general para semigrupos (Zabczyk [26]). Esto llevó a Triggiani [23] a introducir la siguiente clase de semigrupos.

Definición 2.5 *Diremos que un semigrupo $T(\cdot)$ con generador infinitesimal A verifica la Condición de Crecimiento Espectral Determinado (SDGA) si vale la igualdad*

$$s(A) = \omega_0(T). \tag{2.4}$$

Una condición suficiente para que se verifique (2.4) es la igualdad espectral

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = exp(t\sigma(A)), \quad t > 0, \tag{2.5}$$

la cual será estudiada cuidadosamente en la sección siguiente. Para justificar que los resultados que estableceremos no se verifican en general presentemos inicialmente el ejemplo de Zabczyk.

Ejemplo 2.3 Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n la matriz nilpotente de $n \times n$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea H el espacio formado por las sucesiones $x = (x_n)_n$, con $x_n \in \mathbb{C}^n$, y tal que

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Entonces H dotado con la norma $\|\cdot\|$ es un espacio de Hilbert. Sea $T(t)$ el operador definido por

$$T(t)x = (e^{int} e^{A_n t} x_n)_n, \quad t \geq 0.$$

Como $\|A_n\| = 1$, para $n \geq 2$, cada matriz exponencial tiene norma $\|e^{A_n t}\| \leq e^t$.

Se deduce de esto que $T(\cdot)$ es un semigrupo fuertemente continuo en H tal que $\|T(t)\| \leq e^t$. Por otra parte, si denotamos $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \cdots, 1)^T$ entonces

(i) $\|u_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\|e^{tA_n}u_n - e^t u_n\| \to 0$, $n \to \infty$.

En efecto, utilizando que A_n es nilpotente obtenemos

$$e^{tA_n}u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} A_n^k \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \\ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_n}u_n - e^t u_n\| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(e^t - \sum_{k=0}^{i} \frac{t^k}{k!} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(e^t \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2t} \end{aligned}$$

lo que muestra la afirmación.

Por lo tanto, escogiendo $x = (x_k)_k$, $x_n = u_n$ y $x_k = 0$, $k \neq n$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \|e^{A_n t}u_n\| \\ &\geq \|e^t u_n\| - \|e^{A_n t}u_n - e^t u_n\| \\ &\geq e^t - \frac{1}{\sqrt{n}}e^{2t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T(t)\| = e^t$ y $\omega_0(T) = 1$.

Por otra parte, el generador infinitesimal de T es el operador A definido por $Ax = ((inI + A_n)x_n)_n$ en el dominio $D(A) = \{x = (x_n)_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \|(inI + A_n)x_n\|^2 < \infty\}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > 0$, la matriz $\lambda I - inI - A_n = (\lambda - in)I - A_n$ tiene inversa y como A_n es nilpotente

$$\|((\lambda - in)I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda - in|} \to 0,\ n \to \infty.$$

Se deduce de esto que el operador $\lambda I - A$ tiene inversa continua definida por $R(\lambda, A) = ((\lambda - in - A_n)^{-1})_n$. Por consiguiente, $\sigma(A)$ está contenido en $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \leq 0\}$ y la constante espectral $s(A) = 0$. Así, en este caso no se verifica (2.4) ni (2.5).

Modificando levemente la construcción utilizada en este ejemplo puede definirse un semigrupo para el cual $s(A)$ y $\omega_0(T)$ tengan valores preestablecidos.

Afortunadamente la mayoría de los semigrupos que surgen en las aplicaciones verifican SDGA. Tanto para precisar un poco esta afirmación como para nuestros objetivos futuros, introduciremos algunas clases particulares de semigrupos.

Definición 2.6 *Sea T un semigrupo fuertemente continuo en X.*

(a) *El semigrupo T se llama uniformemente continuo para $t > a$ si la función $T(\cdot)$ es continua en la norma de operadores para $t > a$.*

(b) *El semigrupo T se llama compacto para $t > a$ si los operadores $T(t)$, $t > a$, son compactos y T se llama compacto si lo es para $t > 0$.*

Es fácil verificar que todo semigrupo compacto para $t > a$ es uniformemente continuo para $t > a$. De manera similar, los semigrupos diferenciables, en particular los holomorfos, son uniformemente continuos para algún $a > 0$. En la sección siguiente mostraremos que todos estos semigrupos verifican la igualdad espectral (2.5) y por tanto verifican la condición SDGA.

Los semigrupos compactos tienen propiedades adicionales muy importantes en relación con la estabilidad. A continuación mencionamos algunas de ellas.

Proposición 2.7 *Sea T un semigrupo compacto con generador infinitesimal A. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El operador $R(\lambda, A)$ es compacto, para todo $\lambda \in \rho(A)$.*

(b) *El espectro de A consiste sólo de valores propios de A.*

(c) *Si T es débilmente estable entonces T es uniformemente estable.*

Demostración. Sólo mostraremos (c). Sabemos que $T(\cdot)$ es uniformemente acotado. Por lo tanto existe $C > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq C$, para todo $t \geq 0$. Mostremos en primer término que $T(\cdot)$ es fuertemente estable. Para cada $a > 0$ el operador $T(a)$ es compacto de lo cual se deduce que $T(a)'$ también lo es. Por consiguiente, para cada $\varepsilon > 0$, existen $x_i' \in X'$, $\|x_i'\| = 1$, $i = 1, \cdots, n$, para los cuales se verifica la siguiente propiedad: para cada $x' \in X'$, $\|x'\| = 1$, existe un índice i tal que $\|T(a)'x' - T(a)'x_i'\| \leq \varepsilon$. Como

$$\begin{aligned}
\|T(t)T(a)x\| &= \sup_{\|x'\|\leq 1} | < T(t)T(a)x, x' > | \\
&= \sup_{\|x'\|\leq 1} | < T(t)x, T(a)'x' > | \\
&\leq \sup_{\|x'\|\leq 1} | < T(t)x, T(a)'x' - T(a)'x_i' > | + | < T(t)T(a)x, x_i' > | \\
&\leq C\varepsilon + | < T(t)T(a)x, x_i' > |
\end{aligned}$$

se deduce que $T(t)x \to 0,\ t \to \infty$. Análogamente se muestra que $T(t) \to 0,\ t \to \infty$. ∎

3. Teoremas espectrales.

En la sección anterior hemos visto que existe una fuerte relación entre el comportamiento asintótico de un semigrupo y el espectro de su generador infinitesimal. En esta sección estableceremos los principales resultados que relacionan el espectro de un semigrupo y el de su generador infinitesimal. La mayoría de estos resultados se expresan en la forma de una inclusión espectral la cual, con hipótesis apropiadas, puede conducir a una igualdad espectral. En todos estos enunciados entenderemos que $T(\cdot)$ es un semigrupo con generador infinitesimal A. El resultado básico es el siguiente.

Teorema 3.1 *Para todo $t \geq 0$,*

$$exp(t\sigma(A)) \subseteq \sigma(T(t)).$$

Demostración. Para $\lambda \in \mathbb{C}$ denotamos por B_λ el operador definido por

$$B_\lambda x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds, \quad x \in X. \tag{3.1}$$

Entonces B_λ es un operador lineal acotado y utilizando el Corolario 2.1 sabemos que

$$T(t)x - e^{\lambda t}x = (A - \lambda I)B_\lambda x,$$

para todo $x \in X$. Además, B_λ conmuta con $A - \lambda I$. Si suponemos que $e^{\lambda t} \notin \sigma(T(t))$, de (3.1) obtenemos que $(A - \lambda I)B_\lambda$ tiene inversa, de lo cual se deduce que $A - \lambda I$ también es invertible y $\lambda \in \rho(A)$. ∎

Del ejemplo de Zabczyk se deduce que la inclusión opuesta es falsa en general. Motivado por su interés en otros problemas, en el espectro de un operador se acostumbra distinguir partes notables. A continuación estudiaremos algunas de ellas, para las cuales es posible establecer una inclusión espectral similar a la anterior e inclusive, en ciertos casos, una igualdad espectral. En las definiciones que siguen siempre supondremos que A es un operador lineal cerrado con dominio $D(A)$ denso en un espacio de Banach.

Una primera clasificación de partes del espectro de A está constituida por el espectro puntual, el espectro residual y el espectro continuo de A, denotados por $\sigma_p(A)$, $\sigma_r(A)$ y $\sigma_c(A)$, respectivamente. El espectro puntual es el conjunto de valores propios de A; el espectro residual de A es el conjunto formado por los elementos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda I - A$ es monomorfismo y $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ no es denso en X y, el espectro continuo de A es el conjunto formado por los números $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $\lambda I - A$ es monomorfismo y $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ es denso en X. Es claro que esta descomposición induce una partición de $\sigma(A)$.

Teorema 3.2 *Para todo* $t > 0$,

$$exp(t\sigma_p(A)) \subseteq \sigma_p(T(t)) \subseteq exp(t\sigma_p(A)) \cup \{0\}.$$

Demostración. De (2.2) se deduce que si $x \in D(A)$ y $(A - \lambda I)x = 0$ entonces $T(t)x - e^{\lambda t}x = 0$, lo cual muestra la primera inclusión.

Supongamos ahora que $\mu \in \sigma_p(T(t)) \setminus \{0\}$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mu = e^{\lambda t}$. Sea $x \neq 0$ vector propio con respecto a μ y $x' \in X'$ tal que $< x, x' > \neq 0$. Es inmediato que la función $f(s) = e^{-\lambda s}T(s)x$ es periódica con período t. Del desarrollo en serie de Fourier de la función $< f(\cdot), x' >$ en el intervalo $[0, t]$ se obtiene que existe un entero n tal que

$$y = \int_0^t e^{-i\frac{2\pi}{t}ns} e^{-\lambda s} T(s)x\, ds \neq 0.$$

Por el Corolario 2.1 podemos afirmar que $y \in D(A)$ y, con $\alpha = \lambda + i\dfrac{2\pi}{t}n$, que

$$\begin{aligned} T(t)x - e^{\alpha t}x &= (A - \alpha I) \int_0^t e^{\alpha(t-s)} T(s)x\, ds \\ &= e^{\alpha t}(A - \alpha I)y \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo cual implica que α es valor propio de A con vector propio y. Como $\mu = e^{\alpha t}$ esto completa la demostración. ∎

Un resultado similar se verifica para el espectro residual.

Teorema 3.3 *Para todo $t > 0$,*

$$exp(t\sigma_r(A)) \subseteq \sigma_r(T(t)) \cup \sigma_p(T(t)) \tag{3.2}$$

y

$$\sigma_r(T(t)) \subseteq exp(t\sigma_r(A)) \cup \{0\} \tag{3.3}$$

Demostración. Para demostrar (3.2) consideremos $\lambda \in \sigma_r(A)$ y sea $\mu = e^{\lambda t}$. Utilizando (2.2) sabemos que

$$T(t)x - e^{\lambda t}x = (A - \lambda I)\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)x\,ds,$$

para todo $x \in X$, lo cual muestra que el subespacio $\mathcal{R}(T(t) - \mu I) \subseteq \mathcal{R}(A - \lambda I)$ no es denso. Si suponemos que $\mu \notin \sigma_p(T(t))$ entonces $\mu \in \sigma_r(T(t))$.

Para demostrar (3.3), supongamos que $\mu \in \sigma_r(T(t)) \setminus \{0\}$. Entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mu = e^{\lambda t}$. Definamos $\alpha_k = \lambda + i\dfrac{2\pi k}{t}$. Si algún $\alpha_k \in \sigma_p(A)$ aplicando el Teorema 3.2 se deduce que $\mu = e^{\alpha_k t} \in \sigma_p(T(t))$ lo que es contrario a nuestra hipótesis. Por lo tanto, sólo falta mostrar que no todos los números $\alpha_k \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. El espacio $Z = \overline{\mathcal{R}(T(t) - \mu I)}$ no es denso en X y por tanto existe $0 \neq x' \in X'$ tal que $< z, x' >= 0$, para todo $z \in Z$. Utilizando (2.2) y la notación (3.1) podemos escribir que

$$T(t)x - \mu x = B_{\alpha_k}(A - \alpha_k I)x,$$

cuando $x \in D(A)$.

Si suponemos que $\alpha_k \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$ entonces $\mathcal{R}(A - \alpha_k I)$ es denso en X y como B_{α_k} es continuo se deduce que $\mathcal{R}(B_{\alpha_k}) \subseteq Z$. Para $x \in D(A)$ definimos la función $f(s) =< e^{-\lambda s}T(s)x, x' >$. Del desarrollo en serie de Fourier de la función

$f(\cdot)$ en el intervalo $[0,t]$ se obtiene que

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t} \int_0^t < e^{-\lambda u} T(u)x, x' > e^{-i\frac{2\pi}{t}ku}\, du \right) e^{i\frac{2\pi}{t}ks} \\ &= \frac{1}{t} e^{-\lambda t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} < B_{\alpha_k} x, x' > e^{i\frac{2\pi}{t}ks} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $0 < s < t$. Haciendo $s \to 0^+$ en la expresión anterior se obtiene que $< x, x' >= 0$. Como esta propiedad se verifica para todo $x \in D(A)$ y $D(A)$ es denso en X resulta que $x' = 0$, lo cual es absurdo. En consecuencia debe existir $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_n \notin \sigma_c(A) \cup \rho(A)$, lo cual completa la demostración. ■

Una demotración diferente de esta propiedad puede efectuarse utilizando el concepto de semigrupo dual ([19]).

En relación con el espectro continuo solo puede establecerse la siguiente inclusión.

Teorema 3.4 *Para todo $t > 0$,*

$$exp(t\sigma_c(A)) \subseteq \sigma_c(T(t)) \cup exp(t\sigma_p(A)) \cup exp(t\sigma_r(A)). \tag{3.4}$$

Demostración. Del Teorema 3.1 se deduce que si $\lambda \in \sigma_c(A)$ entonces $\mu = e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$. Si suponemos que $\mu \in \sigma_p(T(t)) \cup \sigma_r(T(t))$ aplicando los resultados precedentes obtenemos que $\mu \in exp(t\sigma_p(A)) \cup exp(t\sigma_r(A))$. ■

Tanto para evitar las inclusiones algo complicadas que hemos presentado en los resultados previos como por su relevancia en algunas aplicaciones, se utilizan también otras partes notables del espectro de un operador. Introduciremos sólo dos de estas partes.

Definición 3.1 *Se llama espectro puntual aproximado de A, que denotaremos $\sigma_{ap}(A)$, al conjunto formado por los números complejos $\lambda \in \sigma(A)$ para los cuales existe una sucesión $(x_n)_n$ con $\|x_n\| = 1$, $x_n \in D(A)$ y tal que $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$. En* *este caso la sucesión $(x_n)_n$ se llama vector propio aproximado de A con respecto a λ.*

El siguiente resultado establece las propiedades básicas del espectro puntual aproximado.

Proposición 3.1 *Se verifican las siguientes propiedades:*

(a) $\sigma_p(A) \subseteq \sigma_{ap}(A)$;

(b) $Fr(\sigma(A)) \subseteq \sigma_{ap}(A)$;

(c) $\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(\lambda I - A)$ *no es cerrado* $\}$;

(d) $\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_{ap}(A)$.

Demostración. La afirmación (a) es evidente. Para mostrar (b), consideremos $\lambda \in Fr(\sigma(A))$. Se deduce que existe una sucesión $(\lambda_n)_n$ en $\rho(A)$ que converge a λ. Observemos en primer término que $\|R(\lambda_n, A)\| \to \infty$, cuando $n \to \infty$. En efecto, si no fuese así, de la descomposición

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= (\lambda - \lambda_n)I + \lambda_n I - A \\ &= (\lambda_n I - A)[I + (\lambda - \lambda_n)R(\lambda_n, A)] \end{aligned}$$

y de la serie de Neuman obtenemos que $\lambda \in \rho(A)$. Por lo tanto, existen vectores y_n con $\|y_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|R(\lambda_n, A)y_n\| \to \infty$, $n \to \infty$. Si definimos $x_n = R(\lambda_n, A)y_n$ y $u_n = x_n/\|x_n\|$ entonces $u_n \in D(A)$, $\|u_n\| = 1$ y

$$Au_n - \lambda u_n + (\lambda - \lambda_n)u_n = \frac{y_n}{\|x_n\|}$$

lo cual implica que $Au_n - \lambda u_n \to 0$, $n \to \infty$, y esto a su vez que $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. La demostraciones de (c) y (d) son similares a la anterior, por lo cual las omitiremos.
■

La inclusión espectral asociada al espectro puntual aproximado es la siguiente.

Teorema 3.5 *Para todo $t > 0$,*

$$exp(t\sigma_{ap}(A)) \subseteq \sigma_{ap}(T(t)). \tag{3.5}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$. De la definición se deduce que existen vectores x_n con $\|x_n\| = 1$ tal que $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Utilizando (2.2) obtenemos que

$$T(t)x_n - e^{\lambda t}x_n = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)(Ax_n - \lambda x_n)\, ds \to 0, \;\; n \to \infty,$$

lo cual completa la demostración. ■

Un concepto muy útil en aplicaciones es el de espectro esencial. En la literatura se encuentran varias nociones distintas de espectro esencial. Nos limitaremos a presentar sólo una de ellas, conocido como espectro esencial en sentido de Browder.

Definición 3.2 *Sea A un operador lineal cerrado con dominio denso. El espectro esencial de A, denotado por $\sigma_{ess}(A)$, es el conjunto formado por los $\lambda \in \mathbb{C}$ que verifican alguna de las siguientes condiciones:*

(a) El subespacio $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ no es cerrado;

(b) El subespacio $\cup_{k=1}^{\infty} Ker(\lambda I - A)^k$ tiene dimensión infinita;

(c) λ es un punto de acumulación del espectro de A.

El espacio $M_\lambda(A) = \cup_{k=1}^{\infty} Ker(\lambda I - A)^k$ se llama espacio de vectores propios generalizados con respecto a λ. De la condición (a) se deduce que $\sigma_c(A) \subseteq \sigma_{ess}(A)$. La propiedad fundamental del espectro esencial es que no cambia al perturbar el operador con un operador compacto. Específicamente, se verifica el siguiente resultado ([22]).

Proposición 3.2 *Sea A un operador lineal cerrado con dominio denso y sea B un operador lineal compacto. Entonces $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A + B)$.*

La inclusión espectral para el espectro esencial es la siguiente:

Teorema 3.6 *Para todo* $t > 0$,

$$exp(t\sigma_{ess}(A)) \subseteq \sigma_p(T(t)) \cup \sigma_{ess}(T(t)) \tag{3.6}$$

Demostración. Si $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ entonces $\mu = e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$. Supongamos que $\mu \notin \sigma_p(T(t))$. De acuerdo a la definición de espectro esencial analizaremos tres posibilidades:

(i) Si $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ no es un subespacio cerrado entonces $\mathcal{R}(T(t)-\mu I)$ no es cerrado. En efecto, supongamos que $Y = \mathcal{R}(T(t) - \mu I)$ es cerrado y que $Ax_n - \lambda x_n \to y$, cuando $n \to \infty$. De (2.2) obtenemos que

$$T(t)x_n - \mu x_n = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)(Ax_n - \lambda x_n)\, ds$$

converge a $z = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)y\, ds \in Y$. Aplicando el teorema de la inversa continua de Banach al operador $T(t) - \mu I : X \to Y$ se deduce que la sucesión $(x_n)_n$ es también convergente. Si x es el límite de esta sucesión, como A es un operador lineal cerrado, $x \in D(A)$ y $Ax - \lambda x = y$, lo cual implica que $y \in \mathcal{R}(A - \lambda I)$. En consecuencia $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ es cerrado, lo que es contrario a nuestra hipótesis.

(ii) Si $dim M_\lambda(A) = \infty$ entonces $dim M_\mu(T(t)) = \infty$. En efecto, volviendo a utilizar (2.2) es claro que $Ker(A - \lambda I) \subseteq Ker(T(t) - \mu I)$ y, procediendo inductivamente se obtiene que $Ker(A - \lambda I)^k \subseteq Ker(T(t) - \mu I)^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En consecuencia $M_\lambda(A) \subseteq M_\mu(T(t))$.

(iii) Si λ es un punto de acumulación de $\sigma(A)$ entonces existe una sucesión $(\lambda_n)_n$, $\lambda_n \neq \lambda$, en $\sigma(A)$ que converge a λ. Por lo tanto $\mu_n = e^{\lambda_n t} \in \sigma(T(t))$ y $\mu_n \to \mu$, $n \to \infty$. Como, al menos para n suficientemente grande, $\mu_n \neq \mu$ podemos afirmar que μ es un punto de acumulación de $\sigma(T(t))$. ■

Con el desarrollo anterior hemos conseguido obtener inclusiones espectrales. Retornando a nuestro objetivo inicial de establecer la igualdad espectral (2.5) deseamos estudiar algunas situaciones especiales en las cuales puede caracterizarse $\rho(T(t))$. Para presentar estos resultados necesitamos algunos conceptos y propiedades adicionales sobre convergencia de series de Fourier.

Una serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ es Cesàro sumable a x, lo que denotaremos $(C,1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = x$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = x$, donde

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} s_k \tag{3.7}$$

son llamados promedios de Cesàro y $s_k = \sum_{i=-k}^{i=k} x_i$ es la k-ésima suma parcial.

Es bien conocido que toda serie convergente es Cesàro sumable. Utilizaremos también la siguiente propiedad básica de este concepto de sumabilidad.

Lema 3.1 *Sean $x_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}$ tal que $(C,1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} < x_n, x' >$ existe para cada $x' \in X'$. Entonces $\Lambda : X' \to \mathbb{C}$ definido por $\Lambda x' = (C,1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} < x_n, x' >$ es una forma lineal continua.*

Demostración. Si σ_n son los promedios de Cesàro definidos por (3.7), del Principio del Acotamiento Uniforme se deduce que $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sigma_n\| < \infty$ y por lo tanto

$$|(C,1)\sum_{n=-\infty}^{\infty} < x_n, x' > | = |\lim_{n\to\infty} < \sigma_n, x' > | \leq M\|x'\|,$$

para cada $x' \in X'$. ■

En relación con este concepto, si $f : S^1 \to X$ es una función integrable, $s_n(f,z)$ denotan las sumas parciales de su serie de Fourier en $z \in S^1$ y $\sigma_n(f,z)$ son los promedios de Cesáro correspondientes, utilizaremos la siguiente versión de un teorema de Lebesgue.

Si para $z_0 \in S^1$ existe

$$L = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(z_0 e^{ih}) + f(z_0 e^{-ih})}{2}$$

entonces $\sigma_n(f, z_0) \to L$, $n \to \infty$.

En el resultado que sigue establecemos una caracterización del conjunto resolvente de $T(t)$. Para simplificar las afirmaciones observemos previamente que por la

Proposición 2.4 si A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $T(\cdot)$ entonces el operador $\alpha A - \beta I$, con $\alpha > 0$, es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo $S(\cdot)$ tal que $S(t) = e^{-\beta t}T(\alpha t)$. Si para $t > 0$ escogemos $\alpha = t/2\pi$ y $\beta = \lambda t/2\pi$ se deduce que $1 \in \rho(S(2\pi))$ si, y solamente si, $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$. Es decir, para caracterizar $\rho(T(t))$ es suficiente con caracterizar la inclusión $1 \in \rho(T(2\pi))$.

Por otra parte, si $ik \in \rho(A)$, $k \in \mathbb{Z}$, de (2.2) se deduce que para cada $k \in \mathbb{Z}$ el operador lineal Q_k definido a través de las expresiones

$$Q_k x = \frac{1}{2\pi} R(ik, A)(I - T(2\pi)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iks}T(s)x\,ds, \quad x \in X, \tag{3.8}$$

es acotado y $Q_k x$ representa el k-ésimo coeficiente del desarrollo en serie de Fourier de la función $T(\cdot)x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por la observación precedente aplicada a la función $f(e^{i\theta}) = T(\theta)x$, $0 \leq \theta < 2\pi$, podemos afirmar que

$$(C, 1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k x = \frac{1}{2}(I + T(2\pi))x. \tag{3.9}$$

El siguiente resultado se conoce como teorema de Greiner.

Teorema 3.7 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $1 \in \rho(T(2\pi))$;

(b) $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ *y* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(i\,k, A)x$ *es Cesàro sumable para todo* $x \in X$;

(c) $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ *y* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', R(i\,k, A)x >$ *es Cesàro sumable para todo* $x \in X$ *y todo* $x' \in X'$.

Demostración. Si suponemos que $1 \in \rho(T(2\pi))$ aplicando el Teorema 3.1 deducimos que $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ y utilizando (3.8) obtenemos la resolvente

$$R(ik, A) = 2\pi(I - T(2\pi))^{-1}Q_k.$$

Sustituyendo en (3.9) obtenemos que

$$(C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(ik,A)x = \pi(I-T(2\pi))^{-1}(I+T(2\pi))x.$$

lo que muestra (b). La afirmación (b) $\Rightarrow$ (c) es inmediata.

Para mostrar que (c) $\Rightarrow$ (b), observemos que por el Lema 3.1 para cada $x \in X$ existe $\Lambda_x \in X''$ tal que $\Lambda_x(x') = (C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', R(ik,A)x >$, para todo $x' \in X'$. Del Principio del Acotamiento Uniforme se deduce que el operador $\Lambda : X \to X''$ definido por $\Lambda(x) = \Lambda_x$ es lineal y acotado.

Denotemos por Y el espacio $\mathcal{R}(I-T(2\pi))$. Como todo $y \in Y$ se representa en la forma $y = (I-T(2\pi))x$, se deduce de (3.9) que $\Lambda_y = \pi(I+T(2\pi))x \in X$. Por otra parte, volviendo a utilizar (3.9) podemos mostrar que Y es denso en X.

En efecto, si $x' \in X' \cap Y^{\perp}$, es decir $(I-T(2\pi))'x' = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \Lambda_x(\,(I-T(2\pi))'x'\,) \\
&= (C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} < (I-T(2\pi))'x', R(ik,A)x > \\
&= (C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', R(ik,A)(I-T(2\pi))x > \\
&= 2\pi(C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', Q_k x > \\
&= 2\pi < x', (C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k x > \\
&= \pi < x', (I+T(2\pi))x >,
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto, $(I+T(2\pi))'x' = 0$, de lo cual se deduce que $x' = 0$, lo que a su vez muestra la afirmación. Finalmente, si $x \in X$ y escogemos una sucesión $(y_n)_n$ en Y que converge a x, entonces, por nuestras afirmaciones previas, $\Lambda(x) = \lim_{n\to\infty}\Lambda(y_n) \in X$ y $(C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(ik,A)x = \Lambda(x)$.

Verifiquemos finalmente que (b) $\Rightarrow$ (a). Procediendo como en la parte anterior, $\Lambda(x) = (C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(ik,A)x$ define un operador lineal acotado de X en X. Utilizando (3.9) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\Lambda(I - T(2\pi)) = \frac{1}{2}(I + T(2\pi))$$

de lo que se deduce

$$(\Lambda + \pi I)(I - T(2\pi)) = 2\pi I.$$

Como Λ y $T(2\pi)$ conmutan, resulta que $I - T(2\pi)$ tiene inversa acotada. ■

El siguiente corolario establece que las condiciones de sumabilidad en sentido de Cesàro en el teorema anterior pueden sustituirse por condiciones de acotamiento de la resolvente.

Corolario 3.1 *Si se verifican las condiciones:*

(a) $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ *y* $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|R(ik,A)\| < \infty$;

(b) *Existe* $\omega > \omega_0(T)$ *tal que*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|R(\omega + ik, A)x\|^2 < \infty, \quad x \in X,$$

y

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|R(\omega + ik, A')x'\|^2 < \infty, \quad x' \in X',$$

entonces $1 \in \rho(T(2\pi))$.

Demostración. Por la Proposición 1.2 podemos afirmar que $e^{2\pi\omega} > r_e(T(2\pi))$ por lo cual $e^{2\pi\omega} \in \rho(T(2\pi))$. El semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$ tiene generador infinitesimal $A - \omega I$ y $1 \in \rho(S(2\pi))$. Del Teorema 3.7 se deduce que $(C,1)\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(\omega + ik, A)x$ existe, para todo $x \in X$.

Por otra parte, de la ecuación de las resolventes

$$R(ik,A) - R(\omega + ik, A) = \omega R(\omega + ik, A)R(ik,A)$$

y de las hipótesis (a) y (b) se obtiene que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|R(ik,A)x\|^2 < \infty, \quad x \in X,$$

y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} < R(\omega + ik, A')x', R(ik,A)x >$$

es absolutamente convergente, para todo $x \in X$, $x' \in X'$. Volviendo a utilizar la ecuación de las resolventes, obtenemos

$$\begin{aligned}(C,1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', R(ik,A)x > \; &= \; (C,1) \sum_{k=-\infty}^{\infty} < x', R(\omega + ik, A)x > \\ &\quad + \omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} < R(\omega + ik, A')x', R(ik,A)x > \end{aligned}$$

existe y aplicando el Teorema 3.7 obtenemos la afirmación. ■

Cuando X es un espacio de Hilbert el enunciado puede simplificarse más aún. El siguiente resultado se conoce como teorema de Gearhart.

Corolario 3.2 *Si X es un espacio de Hilbert, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $1 \in \rho(T(2\pi))$;

(b) $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ *y* $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|R(ik,A)\| < \infty$.

Demostración. Para demostrar que (a) $\Rightarrow$ (b) observemos que de la inclusión espectral establecida en el Teorema 3.1 obtenemos que $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$. Además, de (2.2) sigue que

$$R(ik,A)x = (I - T(2\pi))^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-iks} T(s)x\, ds, \quad x \in X,$$

y de esta expresión es evidente que $\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|R(ik,A)\| < \infty$.

Supongamos ahora que se verifica (b). Para $\omega > \omega_0(T)$ procedemos como en la demostración del Corolario anterior y definimos el semigrupo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Aplicando la fórmula (2.2) al semigrupo S obtenemos que

$$R(\omega + ik, A)x = (I - e^{-2\pi\omega}T(2\pi))^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-iks}e^{-\omega s}T(s)x\, ds$$

de modo que, excepto por un operador independiente de k, $R(\omega + ik, A)x$ son los coeficientes de Fourier de $S(s)x$, $0 < s < 2\pi$. De la fórmula de Parseval se obtiene que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|R(\omega + ik, A)x\|^2 < \infty$. Utilizando este mismo argumento con el semigrupo dual $T(t)'$ se obtiene que también $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|R(\omega + ik, A')x'\|^2 < \infty$ de modo que la afirmación (a) se obtiene del Corolario 3.1. ■

Este resultado nos permite caracterizar el espectro de $T(t)$.

Corolario 3.3 *Si X es un espacio de Hilbert, entonces*

$$\begin{aligned} \sigma(T(t)) \setminus \{0\} \;=\; & \{e^{\lambda t} : \lambda_k = \lambda + i\frac{2\pi}{t}k \in \sigma(A), \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}, \\ & o \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|R(\lambda_k, A)\| = \infty\},\ t > 0. \end{aligned}$$

Demostración. Caracterizar los elementos $e^{\lambda t}$ que pertenecen al espectro de $T(t)$ es equivalente a caracterizar la inclusión $1 \in \sigma(S(2\pi))$, donde S es el semigrupo definido por $S(u) = e^{-\lambda \frac{t}{2\pi}u}T(\frac{t}{2\pi}u)$. La afirmación es ahora consecuencia directa del corolario precedente aplicado al semigrupo S. ■

El teorema de Gearhart ha sido generalizado por Latushkin y Montgomery-Smith ([16]) a espacios de Banach arbitrarios mediante el concepto de semigrupo de evolución en espacios de funciones. A continuación presentamos algunos de estos resultados.

Sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A en el espacio de Banach X. Sea F cualquiera de los espacios $L^p([0,2\pi];X)$, $1 \le p < \infty$. Se define $S(t)$ en F por

$$[S(t)f](\xi) = T(t)f([\xi - t]),\ \xi \in [0, 2\pi],$$

donde $f([\xi - t])$ representa el valor de f en $\xi - t$, módulo 2π.

La aplicación $S(\cdot)$ es un semigrupo fuertemente continuo y ha sido llamado semigrupo de evolución por Latushkin y Montgomery-Smith. Si denotamos por B su generador infinitesimal y L_k representa el operador multiplicación por $e^{ik\xi}$, $k \in \mathbb{Z}$, en F entonces $BL_k = L_k(B - ikI)$. Se deduce de esto que si $ik \in \sigma(B)$ entonces también $0 \in \sigma(B)$. Una propiedad fundamental del operador B se establece a continuación sin demostración ([16]).

Lema 3.2 *Si* $1 \in \sigma_{ap}(T(2\pi))$ *entonces* $0 \in \sigma_{ap}(B)$.

Se deduce de esta propiedad el siguiente resultado.

Lema 3.3 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $1 \in \rho(T(2\pi))$;

(b) $1 \in \rho(S(2\pi))$;

(c) $0 \in \rho(B)$.

Demostración. Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b) observamos que

$$S(2\pi)f(\xi) = T(2\pi)f(\xi), \ \ \xi \in [0, 2\pi]. \tag{3.10}$$

Por lo tanto, si $1 \in \rho(T(2\pi))$ el operador de multiplicación en F por $(I - T(2\pi))^{-1}$ muestra que $1 \in \rho(S(2\pi))$. La afirmación (b) $\Rightarrow$ (c) es consecuencia directa del Teorema 3.1. Pare demostrar que (c) $\Rightarrow$ (a), supongamos que $1 \in \sigma(T(2\pi))$. Como por el lema anterior $1 \notin \sigma_{ap}(T(2\pi))$ sólo queda la posibilidad que $1 \in \sigma_r(T(2\pi))$. En este caso, de (3.10) se deduce que $1 \in \sigma_r(S(2\pi))$ y, aplicando el Teorema 3.3 obtenemos que existe $ik \in \sigma_r(B)$, $k \in \mathbb{Z}$. Por la observación previa podemos afirmar que $0 \in \sigma(B)$, lo que completa la demostración. ∎

Estamos en condiciones de establecer el teorema de Latushkin y Montgomery-Smith. En este enunciado $\|\cdot\|_p$ indica la norma en F.

Teorema 3.8 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A en un espacio de Banach X. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $1 \in \rho(T(2\pi))$;

(b) $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ *y existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|\sum_{k=1}^{n} R(ik, A)\, e^{ik\xi}\, x_k\|_p \leq C\, \|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\xi} x_k\|_p \tag{3.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y* $x_k \in X,\ k = 1, \cdots, n.$

Demostración. Observemos inicialmente que si $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ y $x_k \in X$, las funciones $f(\xi) = \sum_{k=1}^{n} R(ik, A)\, x_k\, e^{ik\xi}$ y $g(\xi) = -\sum_{k=1}^{n} x_k e^{ik\xi}$ satisfacen

$$\begin{aligned} S(t)f(\xi) &= S(t)\left(\sum_{k=1}^{n} R(ik, A)\, x_k\, e^{ik\xi}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} T(t) R(ik, A)\, x_k\, e^{ik(\xi - t)} \end{aligned}$$

de lo que se deduce $Bf = g$.

Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), si $1 \in \rho(T(2\pi))$ entonces del Teorema 3.1 sabemos que $i\mathbb{Z} \subseteq \rho(A)$ y utilizando la implicación (a) $\Rightarrow$ (c) del lema previo obtenemos que B tiene inversa acotada. Si definimos $C = \|B^{-1}\|$, para las funciones f y g consideradas inicialmente se verifica que $f = B^{-1}g$ y por lo tanto $\|f\|_p \leq C\|g\|_p$, lo que establece (3.11).

Supongamos ahora que se verifica (b). Mostremos en primer término que $0 \notin \sigma_{ap}(B)$. En efecto, el conjunto formado por las funciones de tipo g es denso en F, de lo cual se deduce que el conjunto formado por las funciones de tipo f también es denso en F. De (3.11) obtenemos que $\|Bf\|_p = \|g\|_p \geq C^{-1}\|f\|_p$ y, usando la densidad de las funciones de tipo f podemos afirmar que $\|Bu\|_p \geq C^{-1}\|u\|_p$, para todo $u \in D(B)$. Una consecuencia inmediata de esta propiedad es que $0 \notin \sigma_{ap}(B)$.

Si suponemos que $1 \in \sigma(T(2\pi)) = \sigma_r(T(2\pi)) \cup \sigma_{ap}(T(2\pi))$ se presentan las posibilidades $1 \in \sigma_{ap}(T(2\pi))$ o $1 \in \sigma_r(T(2\pi))$. En el primer caso, por el lema previo, $0 \in \sigma_{ap}(B)$ lo que contradice la observación precedente. En el segundo caso, por el Teorema 3.3 existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $ik \in \sigma_r(A)$ lo que es contrario a la hipótesis. ■

Para demostrar el Teorema Espectral para semigrupos necesitamos establecer las propiedades esenciales de una técnica general para convertir vectores propios aproximados en vectores propios, lo que se consigue extendiendo los operadores a espacios de sucesiones.

Sea $T(t)$ un semigrupo fuertemente continuo en el espacio de Banach X. Denotaremos por $\ell^\infty(X)$ el espacio formado por las sucesiones acotadas $(x_n)_n$ en X dotado con la norma

$$\|(x_n)_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|.$$

Sea $\ell_0^\infty(X)$ el subespacio de $\ell^\infty(X)$ formado por las sucesiones $(x_n)_n$ tal que las funciones $T(\cdot)x_n$, $n \in \mathbb{N}$, son equicontinuas. Si $c_0(X)$ es el espacio de las sucesiones en X que convergen a cero, es fácil verificar que $c_0(X) \subseteq \ell_0^\infty(X)$. Denotaremos por $\widehat{\ell_0^\infty}(X)$ el espacio cociente $\ell_0^\infty(X)/c_0(X)$ y por π a la aplicación cociente respectiva. La clase de equivalencia $\pi(x_n)_n$ la representaremos por $\hat{x}$.

El siguiente resultado resume algunas propiedades de esta construcción:

Proposición 3.3 *En las condiciones precedentes:*

(i) *$\ell_0^\infty(X)$ es un subespacio cerrado de $\ell^\infty(X)$;*

(ii) *El operador $\widetilde{T}(t) : \ell_0^\infty(X) \to \ell_0^\infty(X)$, $\widetilde{T}(t)(x_n)_n = (T(t)x_n)_n$ es un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal $\widetilde{A}$ definido por*

$$\widetilde{A}(x_n)_n = (Ax_n)_n$$

en el dominio

$$D(\widetilde{A}) = \{(x_n)_n \in \ell_0^\infty(X) : x_n \in D(A),\ (Ax_n)_n \in \ell_0^\infty(X)\}.$$

(iii) *La aplicación* $\widehat{T}(t) : \widehat{\ell_0^\infty}(X) \to \widehat{\ell_0^\infty}(X)$ *inducida en el cociente por* $\widetilde{T}(t)$ *define un semigrupo fuertemente continuo cuyo generador infinitesimal* $\widehat{A}$ *es el operador definido por*

$$\widehat{A}\pi(x_n)_n = \pi(Ax_n)_n$$

en el dominio

$$D(\widehat{A}) = \{\hat{x} \in \widehat{\ell_0^\infty}(X) : \hat{x} = \pi(x_n)_n, \ (x_n)_n \in D(\widetilde{A})\}.$$

(iv) $\sigma_p(\widehat{A}) \subseteq \sigma_{ap}(A)$;

(v) *Si* $T(\cdot)$ *es un semigrupo uniformemente continuo en* (a, ∞), $a \geq 0$, *entonces* $\sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_p(\widehat{T}(t))$, $t > 0$.

Demostración. Sólo demostraremos las dos últimas propiedades.

(iv) Observemos inicialmente que si $0 \neq \hat{x} \in \widehat{\ell_0^\infty}(X)$, para cada $0 < \varepsilon < \|\hat{x}\|$ existe una subsucesión $(u_k)_k$ de $(x_n)_n$ tal que $\|u_k\| \geq \|\hat{x}\| - \varepsilon$. En efecto, si no fuese así existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| < \|\hat{x}\| - \varepsilon$, para todo $n \geq N$. En este caso $y = (x_1, x_2, \cdots, x_{N-1}, 0, 0, \cdots) \in c_0(X)$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x - y\| = \sup_{n \geq N} \|x_n\| \leq \|\hat{x}\| - \varepsilon$, lo cual es absurdo.

Si $\lambda \in \sigma_p(\widehat{A})$ existe $0 \neq \hat{x} \in D(\widehat{A})$ tal que $\widehat{A}\hat{x} = \lambda\hat{x}$. Podemos suponer que $\|\hat{x}\| > 1$ y, utilizando la observación precedente, que cada $\|x_n\| \geq 1$. Aplicando las definiciones, obtenemos que $\pi(Ax_n)_n = \pi(\lambda x_n)_n$. Se deduce de esta igualdad que $Ax_n - \lambda x_n \to 0$, $n \to \infty$, lo cual muestra que $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$.

(v) Sea $0 \neq \mu \in \sigma_{ap}(T(t))$. Por la Definición 3.1, existe una sucesión $(x_n)_n$, $\|x_n\| = 1$, tal que $T(t)x_n - \mu x_n \to 0$, $n \to \infty$. De la definición de convergencia y procediendo inductivamente puede mostrarse que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(kt)x_n\| \geq \left(\frac{|\mu|}{2}\right)^k$, para todo $n \geq N_k$. Escogemos k tal que $kt > a$ y definimos la sucesión $u_n = T(kt)x_n$. Claramente $u \in \ell^\infty(X)$ y como

$$\|T(h)u_n - u_n\| = \|\left(T(kt + h) - T(kt)\right)x_n\| \to 0, \ h \to 0^+,$$

uniformenmente en n, entonces $u \in \ell_0^\infty(X)$. De la construcción de u_n es inmediato también que $T(t)u_n - \mu u_n \to 0$, $n \to \infty$ y que $\|\hat{u}\| \geq \left(\frac{|\mu|}{2}\right)^k$. Finalmente, $\widehat{T}(t)\hat{u} = \pi(T(t)u_n)_n = \mu\hat{u}$, lo que completa la demostración. ■

Teorema 3.9 *Si $T(t)$ es un semigrupo uniformemente continuo en (a, ∞), $a \geq 0$, entonces*

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = exp(t\sigma(A)),\ t > 0.$$

Demostración. Por el Teorema 3.1 de inclusión espectral sólo falta mostrar que

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} \subseteq exp(t\sigma(A)),\ \ t > 0.$$

y por la Proposición 3.1 relativa a las propiedades del espectro puntual aproximado, es suficiente verificar que

$$\sigma_{ap}(T(t)) \setminus \{0\} \subseteq exp(t\sigma(A)),\ t > 0.$$

Por este motivo, supongamos que $0 \neq \mu \in \sigma_{ap}(T(t))$. De la propiedad (v) anterior deducimos que $\mu \in \sigma_p(\widehat{T}(t))$. Aplicando el Teorema 3.2 de inclusión espectral del espectro puntual al semigrupo $\widehat{T}$ obtenemos que $\mu \in exp(t\sigma_p(\widehat{A}))$ y, utilizando la propiedad (iv) anterior, concluimos que $\mu \in exp(t\sigma_{ap}(A))$. ■

Para obtener la igualdad (2.4) no es necesario que se verifique la igualdad espectral (2.5). Por ejemplo, es suficiente con la igualdad

$$\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = \overline{exp(t\sigma(A))},\ t > 0,$$

conocida como igualdad espectral débil. Para un estudio sobre esta y otras relaciones entre (2.4) y (2.5) mencionamos a [18,19].

A continuación vamos a utilizar estos resultados espectrales para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del problema abstracto de Cauchy.

La Proposición 2.6 nos permite establecer el siguiente resultado.

Corolario 3.4 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *El semigrupo* $T(\cdot)$ *es uniformemente estable;*

(b) *La constante espectral* $s(A) < 0$ *y existe* $t > 0$ *tal que* $|\mu| < 1$ *para todo* $\mu \in \sigma_{ap}(T(t))$.

Sea T un semigrupo holomorfo uniformemente acotado ([20]) con generador infinitesimal A. En este caso existe una constante $C > 0$ tal que $\|AT(t)\| \leq C/t$, $t > 0$. Por lo tanto, $T(t)y \to 0$, $t \to \infty$, para todo $y \in \mathcal{R}(A)$. Se deduce de esto la siguiente propiedad.

Proposición 3.4 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo holomorfo uniformemente acotado con generador infinitesimal* A. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $0 \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$;

(b) T *es fuertemente estable.*

Demostración. Si suponemos que $0 \notin \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$ entonces $\mathcal{R}(A)$ es denso y de la observación precedente se deduce que T es fuertemente estable. Recíprocamente, si se verifica (b) y suponemos que $0 \in \sigma_p(A)$ entonces existe $0 \neq x \in D(A)$ tal que $Ax = 0$. Por lo tanto $T(t)x = x$, para todo $t \geq 0$, lo que contradice la hipótesis. Si suponemos que $0 \in \sigma_r(A)$ entonces existe $0 \neq x' \in X'$ tal que $x' \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$. De (2.2) se deduce que $< T(t)x - x, x' >= 0$, para todo $x \in X$, lo que nuevamente contradice la hipótesis. ■

Consideremos el problema de Cauchy abstracto no homogéneo

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0, \tag{3.12}$$

donde f es una función localmente integrable. La solución en sentido débil de (3.12) se define por

$$x(t, x_0) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds. \tag{3.13}$$

Proposición 3.5 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo fuertemente estable con generador infinitesimal* A. *Si existe* $y \in \mathcal{R}(A)$ *tal que* $\int_0^\infty \|f(s) - y\|\,ds < \infty$ *entonces la solución débil* $x(t, x_0) \to u$, $t \to \infty$, *para* $u \in D(A)$ *tal que* $Au = -y$.

Demostración. De la expresión (3.13) se deduce que

$$\begin{aligned} x(t,x_0) &= T(t)x_0 - \int_0^t T(t-s)Au\,ds + \int_0^t T(t-s)\,(f(s)-y)\,ds \\ &= T(t)x_0 - T(t)u + u + \int_0^t T(t-s)\,(f(s)-y)\,ds \end{aligned}$$

y como $T(\cdot)$ es fuertemente estable es suficiente verificar que el término integral del segundo miembro converge a 0. Si $g(s) = f(s) - y$ podemos descomponer

$$\begin{aligned} \int_0^t T(t-s)g(s)\,ds &= \int_0^a T(t-s)g(s)\,ds + \int_a^t T(t-s)g(s)\,ds \\ &= T(t-a)\int_0^a T(a-s)g(s)\,ds + \int_a^t T(t-s)g(s)\,ds \end{aligned}$$

para $a \geq 0$. En esta descomposición, el primer término del segundo miembro converge a 0 ya que $T(\cdot)$ es fuertemente estable y el segundo término converge a 0 cuando $a,\ t \to \infty$ por la hipótesis. ■

En los resultados que siguen denotemos por Γ el conjunto formado por los números reales α para los cuales $\{\|R(\alpha + i\beta, A)\| : \beta \in \mathbb{R}\}$ es acotado. Sabemos que Γ es no vacío y si $T(\cdot)$ es un semigrupo con generador infinitesimal A definido en un espacio de Hilbert, como consecuencia del Corolario 3.2 se obtiene la siguiente propiedad.

Corolario 3.5 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A. Entonces*

$$\omega_0(T) = \inf \Gamma.$$

Demostración. Sea $\alpha \in \Gamma$ y sea $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu = e^{2\pi\lambda}$ tal que $|\mu| = e^{2\pi\alpha}$. Definimos el semigrupo $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$. Entonces el generador infinitesimal de S es $B = A - \lambda I$ y la resolvente $R(ik, B) = R(\lambda + ik, A)$. Como $Re(\lambda) = \alpha \in \Gamma$ podemos afirmar que $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|R(ik, B)\| < \infty$ y aplicando el Corolario 3.2 obtenemos que $1 \in \rho(S(2\pi))$. Por la definición de S esto es equivalente a que $\mu = e^{2\pi\lambda} \in \rho(T(2\pi))$. Como μ fue escogido arbitrariamete se deduce que $r_e(T(2\pi)) \leq |\mu|$ y por la Proposición 2.2 obtenemos que $e^{2\pi\omega_0} \leq e^{2\pi\alpha}$. En consecuencia $\omega_0 \leq \alpha$, lo que muestra que $\omega_0 \leq$

$\inf \Gamma$. Por otra parte, de la Proposición 2.3(d) se deduce que $\omega_0(T)$ no puede ser menor que $\inf \Gamma$. ■

Corolario 3.6 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A. Si el operador resolvente de A es uniformemente acotado en el semiplano $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > 0\}$ entonces T es uniformemente estable.*

Demostración. Por el resultado previo es suficiente mostrar que $\inf \Gamma < 0$. Sea $M = \sup\{\|R(\lambda, A)\| : Re(\lambda) > 0\}$. Específicamente mostraremos que $\inf \Gamma \leq -\frac{1}{M}$. En efecto, si $Re(\lambda_0) > 0$ de la descomposición

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= (\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A \\ &= (\lambda_0 I - A)\left[(\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A) + I\right] \end{aligned}$$

y de la serie de Neuman se deduce que $\lambda \in \rho(A)$ cuando $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{M}$ y que, en este caso, $R(\lambda, A) = (I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, A))^{-1} R(\lambda_0, A)$. Así, si $-\frac{1}{M} < \alpha < 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ y escogemos $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta$ de modo que $\alpha_0 > 0$ y $|\alpha_0 - \alpha| M = 1 - \varepsilon$ entonces $\|R(\alpha + i\beta, A)\| \leq M/\varepsilon$, independiente de β, lo cual muestra que $\alpha \in \Gamma$. ■

Retornado a la teoría general en espacios de Banach, podemos utilizar el Teorema 3.8 para obtener una caracterización de estabilidad uniforme. En el resultado siguiente mantenemos las notaciones utilizadas en el Teorema 3.8.

Corolario 3.7 *Sea $T(\cdot)$ un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A en un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\omega_0(T) < 0$;

(b) $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \geq 0\} \subseteq \rho(A)$ *y para cada λ con $Re(\lambda) \geq 0$ existe una constante $C_\lambda > 0$ tal que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} R(\lambda + ik, A)\, e^{ik\xi} x_k \right\|_p \leq C_\lambda \left\| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\xi} x_k \right\|_p \tag{3.14}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ *y* $x_k \in X$, $k = 1, \cdots, n$.

Demostración. Mostremos inicialmente que (a) $\Rightarrow$ (b). Sea $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \geq 0$. Entonces por la Proposición 2.3(d) sabemos que $\lambda + ik \in \rho(A)$ y como $|e^{(\lambda+ik)2\pi}| \geq 1$ entonces $e^{(\lambda+ik)2\pi} \in \rho(T(2\pi))$ o, equivalentemente, $1 \in \rho(e^{-\lambda 2\pi}T(2\pi))$. Aplicando el Teorema 3.8 al semigrupo $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$ cuyo generador es $A - \lambda I$ se obtiene (b).

Recíprocamente, si suponemos que vale (b), manteniendo las notaciones del párrafo anterior, obtenemos que $ik \in \rho(A - \lambda I)$, $k \in \mathbb{Z}$ y de (3.14)

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} R(ik, A - \lambda I)\, e^{ik\xi}\, x_k \right\|_p \leq C_\lambda \left\| \sum_{k=1}^{n} e^{ik\xi} x_k \right\|_p .$$

Volviendo a utilizar el Teorema 3.8 con el semigrupo $S(t)$ obtenemos que $1 \in \rho(S(2\pi))$, de lo cual se deduce que $e^{\lambda 2\pi} \in \rho(T(2\pi))$. Si $\mu \in \mathbb{C}$ con $|\mu| \geq 1$, entonces existe λ tal que $\mu = e^{\lambda 2\pi}$ y $Re(\lambda) \geq 0$. Por la observación precedente $\mu \in \rho(T(2\pi))$ y por lo tanto $r_e(T(2\pi)) = e^{\omega_0(T)2\pi} < 1$, lo cual muestra que $\omega_0(T) < 0$ y completa la demostración. ■

El resultado que sigue es una aplicación del concepto de espectro esencial. Versiones más generles se encuentran en [12].

Teorema 3.10 *Sea* T *un semigrupo débilmente estable con generador infinitesimal* A *y sea* D *un operador lineal compacto. Si el semigrupo* S *generado por* $A + D$ *es uniformemente estable entonces* T *también es uniformemente estable.*

Demostración. De la solución del problema abstracto de Cauchy no homogéneo se deduce que el semigrupo $S(\cdot)$ satisface

$$S(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)DS(s)x\, ds.$$

El operador definido por el término integral del segundo miembro de la expresión anterior es compacto de modo que aplicando la Proposición 3.2 obtenemos que $\sigma_{ess}(T(t)) = \sigma_{ess}(S(t))$. Escojamos $t > 0$ tal que $\|S(t)\| < 1$. Como $\sigma_c(T(t)) \subseteq$

$\sigma_{ess}(T(t))$ entonces $\sigma(T(t)) \subseteq \sigma_p(T(t)) \cup \sigma_r(T(t)) \cup \sigma_{ess}(S(t))$. Utilizando los Teoremas 3.2 y 3.3 y procediendo como en la demostración de la Proposición 3.4 obtenemos que si $\mu = e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t)) \cup \sigma_r(T(t))$ entonces $Re(\lambda) < 0$ y $|\mu| < 1$. Como $\sigma(T(t))$ es un conjunto compacto obtenemos que $r_e(T(t)) < 1$, lo que muestra que $\omega_0(T) < 0$ y T es uniformemente estable. ∎

4. Aplicaciones

Presentamos inicialmente una aplicación a la estabilización de sistemas de control distribuidos. Los sistemas de control bajo consideración serán aquellos que pueden se modelados por la ecuación

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4.1}$$

donde el estado $x(t)$ pertenece a un espacio de Banach de dimensión infinita X, el control $u(t)$ pertenece a un espacio de controles U, A es el generador infinitesimal de un semigrupo T en X y $B : U \to X$ es un operador lineal continuo. Consideraremos como controles admisibles a las funciones $u(\cdot)$ localmente integrables en sentido de Bochner y como trayectorias admisibles a las soluciones débiles de (4.1). Es decir

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)\,ds$$

representará a la trayectoria que se inicia en x_0 con función de control $u(\cdot)$.

Los aspectos generales de la teoría de control para este tipo de sistema se encuentran en [6]. En este trabajo sólo estudiaremos la estabilizabilidad en sentido uniforme. Para resultados generales relativos a estabilizabilidad en sentido fuerte en espacios de Hilbert puede consultarse Balakrishnan [2] y Levan y Rigby [17], mientras que la relación entre controlabilidad y estabilizabilidad en sentido débil en espacios de Hilbert fue estudiada por Benchimol [4].

Definición 4.1 *Diremos que el sistema (4.1) es (uniformemente) estabilizable si existe un operador lineal acotado $F : X \to U$ tal que el semigrupo generado por*

$A + BF$ *es uniformemente estable.*

En problemas concretos el espacio de controles U es un espacio de dimensión finita de modo que el operador B es compacto. El siguiente resultado ([12]), cuya demostración es consecuencia directa del Teorema 3.10, extiende un resultado previo de Gibson [8] y establece que para sistemas distribuidos la estabilización es difícil de conseguir.

Teorema 4.1 *Sea* T *un semigrupo débilmente estable y no uniformemente estable con generador infinitesimal* A. *Si* U *es un espacio de dimensión finita entonces el sistema (4.1) no es estabilizable.*

No obstante lo anterior, introduciendo el concepto de controlabilidad aproximada puede mostrarse que la mayoría de los sistemas concretos son estabilizables. Para resultados de este tipo asi como numerosas referencias sobre el tema ver [13].

Como segunda aplicación consideremos las ecuaciones diferenciales funcionales con retardo $r > 0$. Estas ecuaciones son estudiadas en el espacio de las funciones continuas $C := C([-r, 0]; \mathbb{C}^n)$. Se introduce la notación $x_t : [-r, 0] \to \mathbb{C}^n$ para representar la función definida por $x_t(\theta) := x(t + \theta)$. Nuestro objetivo es estudiar la estabilidad asintótica de las ecuaciones que se representan en la forma

$$x'(t) = L(x_t) + f(t) \tag{4.2}$$

donde $L : C \to \mathbb{C}^n$ es una aplicación lineal continua.

Consideremos inicialmente el problema homogéneo

$$x'(t) = L(x_t), \quad t \geq 0, \tag{4.3}$$

$$x_0 = \varphi, \tag{4.4}$$

cuya solución la denotaremos por $x(\cdot, \varphi)$. Se define el operador $V(t) : C \to C$, denominado operador de solución, por $V(t)\varphi := x_t(\cdot, \varphi)$.

En consideración a los resultados de la sección 3 es suficiente establecer las propiedades espectrales del operador $V(t)$.

El siguiente resultado se encuentra en Hale [10], Hale-Lunel [11].

Teorema 4.2 *En las condiciones precedentes:*

(a) *La aplicación V es un semigrupo fuertemente continuo en C cuyo generador infinitesimal A_V es el operador definido por*

$$A_V\varphi := \varphi'$$

en el dominio $D(A_V) = \{\varphi \in C : \varphi' \in C,\ \ \varphi'(0) = L(\varphi)\}$.

(b) *El semigrupo $V(t)$ es compacto para $t \geq r$ y diferenciable para $t > r$.*

(c) *El espectro de A_V coincide con su espectro puntual y $\lambda \in \sigma(A_V)$ si, y solamente si, $det\Delta(\lambda) = 0$, donde $\Delta(\lambda)$ es la matriz*

$$\Delta(\lambda) = \lambda I \ - \ L(e^{\lambda\theta}I).$$

(d) *Si $\lambda \in \sigma(A_V)$ entonces el espacio de vectores propios generalizados*

$$M_\lambda(A_V) := \cup_{i=1}^{\infty} Ker(\lambda I - A_V)^i$$

tiene dimensión finita, el ascendente de $\lambda I - A_V$ es finito ($= k$) y

$$C = Ker(\lambda I - A_V)^k \oplus \mathcal{R}(\lambda I - A_V)^k.$$

(e) *Para todo $\gamma \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\lambda \in \sigma(A_V) : Re(\lambda) \geq \gamma\}$ es finito.*

Es decir, el semigrupo $V(\cdot)$ es uniformemente continuo, el espectro esencial de A_V y $V(t)$ es vacío y la estabilidad asintótica del sistema depende unicamente de los valores propios de A_V. Lo anterior no ocurre si (4.2) es una ecuación con retardo no acotado ([14]) ni tampoco para ecuaciones diferenciales parciales con retardo ([13, 25]).

Como tercera aplicación observemos que para implementar métodos numéricos en el problema de Cauchy abstracto es necesario considerar una sucesión $(T_n)_n$ de semigrupos fuertemente continuos, usualmente provenientes de esquemas de discretización, que aproximan un semigrupo T. En este caso es muy importante conocer si los semigrupos T_n son uniformemente estables y si la propiedad de estabilidad es independiente de n, es decir, si los semigrupos T_n verifican una desigualdad exponencial $\|T_n(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$ y para ciertas constantes M y $\alpha > 0$ independientes de n. Recientemente B. Z. Guo [9] ha mostrado que el Corolario 3.2 puede extenderse para familias de semigrupos. Para demostrar este resultado establezcamos un resultado previo que generaliza la Proposición 2.6.

Teorema 4.3 *Sean $T_j(\cdot)$, $j \in J$, semigrupos fuertemente continuos en un espacio de Banach X. Si se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *Existen $M \geq 1$ y $\omega > 0$ tal que*

$$\|T_j(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0, \quad j \in J;$$

(b) *Existen $1 \leq p < \infty$ y $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty \|T_j(t)x\|^p \, dt \leq C^p \|x\|^p, \quad x \in X, \quad j \in J.$$

Entonces existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que $\|T_j(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$ y $j \in J$.

Demostración. Procediendo como en la demostración de la Proposición 2.6 se verifica en primer término que los semigrupos $T_j(t)$ son acotados en norma uniformemente en $j \in J$. Utilizando esta propiedad se verifica que existe $t_0 > 0$ tal que $\|T_j(t_0)\| \leq 1/2$ para todo $j \in J$. Una estimación estandard con semigrupos muestra la afirmación. ■

Si $T(\cdot)$ es un semigrupo fuertemente continuo con generador infinitesimal A, por la Proposición 2.3 sabemos que $R(\sigma + i\tau, A)x$, para $\sigma > \omega_0(T)$, es la transformada de Laplace de $T(t)x$, $x \in X$. En el caso que X sea un espacio de Hilbert podemos relacionar la transformada de Laplace con la transformada de Fourier para obtener

$$\int_{-\infty}^\infty \|R(\sigma + i\tau, A)x\|^2 \, d\tau = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\sigma t} \|T(t)x\|^2 \, dt, \tag{4.5}$$

para todo $x \in X$.

Teorema 4.4 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $T_j(\cdot)$, $j \in J$, una familia de semigrupos , con generador infinitesimal A_j. Si existen constantes $M \geq 1$, $\omega > 0$ tal que*

$$\|T_j(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ t \geq 0, \ j \in J, \tag{4.6}$$

entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *Existen constantes $K \geq 1$, $\alpha > 0$ tal que $\|T_j(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$ y todo $j \in J$.*

(b) *El semiplano $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) \geq 0\} \subseteq \rho(A_j)$ y $C = \sup\{\|R(\lambda, A_j)\| : Re(\lambda) \geq 0, \ j \in J\} < \infty$.*

Demostración. Sea ω_0 el infimo de las constantes ω para las cuales se verifica (4.6). Supongamos que $\omega_0 \geq 0$. Entonces, para $\omega_0 < \omega < \sigma$, de la ecuación de las resolventes se deduce que

$$R(\omega_0 + i\tau, A_j) = R(\sigma + i\tau, A_j) + (\sigma - \omega_0) R(\omega_0 + i\tau, A_j)\, R(\sigma + i\tau, A_j).$$

De esta expresión obtenemos la estimación

$$\|R(\omega_0 + i\tau, A_j)x\| \leq (1 + C(\sigma - \omega_0))\, \|R(\sigma + i\tau, A_j)x\|.$$

Como por el Corolario 3.2 cada semigrupo $T_j(\cdot)$ es uniformemente estable, usando (4.5), para cada $j \in J$, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-2\omega_0 t}\|T_j(t)x\|^2\, dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|R(\omega_0 + i\tau, A_j)x\|^2\, d\tau \\
&\leq \frac{1}{2\pi}(1 + C(\sigma - \omega_0))^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|R(\sigma + i\tau, A_j)x\|^2\, d\tau \\
&= (1 + C(\sigma - \omega_0))^2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t}\|T_j(t)x\|^2\, dt \\
&\leq (1 + C(\sigma - \omega_0))^2 \int_0^\infty e^{-2\sigma t} M^2 e^{2\omega t}\|x\|^2\, dt \\
&= \frac{1}{2}(1 + C(\sigma - \omega_0))^2 \frac{M^2}{\sigma - \omega}\|x\|^2.
\end{aligned}$$

Utilizando ahora el Teorema 4.3 se deduce que existen constantes $K \geq 1$, $\alpha > 0$ tal que $e^{-\omega_0 t}\|T_j(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$, para todo $t \geq 0$ y todo $j \in J$. Como esto es contrario a la definición de ω_0 obtenemos que $\omega_0 < 0$. ■

De manera similar a lo que efectuamos para el Teorema de Gearhart, las condiciones de acotamiento (b) en el Teorema anterior pueden sustituirse por acotamiento de la resolvente, en este caso uniformemente en $j \in J$, en líneas verticales ([9]).

En la sección 3 hemos justificado la importancia de estudiar semigrupos uniformemente continuos considerando que este tipo de semigrupos representan muchas situaciones concretas. Otra clase de semigrupos que surgen frecuentemente en aplicaciones son los semigrupos positivos. Como no disponemos de espacio para presentar resultados generales respecto de esta clase de semigrupos, nos limitaremos a estudiar como aplicación de los resultados previos un par de casos especiales. En estos casos, (Ω, μ) es un espacio de medida positiva. Los resultados estan basados en la siguiente propiedad de la transformada de Laplace ([5]).

Lema 4.1 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo fuertemente continuo positivo en* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *con generador infinitesimal* A. *Entonces* $s(A) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A)\}$ *y*

$$R(\lambda, A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)f\,dt,$$

donde la integral converge absolutamente, para todo $f \in L^p(\Omega)$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $Re(\lambda) > s(A)$.

Observamos también que para mostrar la igualdad (2.4) para semigrupos positivos es suficiente verificar que si $s(A) < 0$ entonces $\omega_0(T) < 0$. En efecto, si para un semigrupo positivo T con generador infinitesimal A se tuviera $s(A) < \omega_0(T)$ entonces escogiendo λ tal que $s(A) < \lambda < \omega_0(T)$ y definiendo el semigrupo $S(t) = e^{-\lambda t}T(t)$, $t \geq 0$, cuyo generador infinitesimal es $B = A - \lambda I$ tendríamos $s(B) = s(A) - \lambda < 0$ y $\omega_0(S) = \omega_0(T) - \lambda > 0$.

Teorema 4.5 *Sea* $T(\cdot)$ *un semigrupo fuertemente continuo positivo en* $L^p(\Omega)$, $p = 1, 2$, *con generador infinitesimal* A. *Entonces* $s(A) = \omega_0(T)$.

Demostración. Supongamos que $s(A) < 0$. En el caso $p = 1$, por el lema previo $\int_0^\infty T(t)f\,dt$ existe como integral impropia absolutamente convergente para todo $f \in L^1(\Omega)$. En consecuencia $\int_0^\infty \|T(t)f\|\,dt < \infty$ para todo $f \in L^1(\Omega)$ y de la Proposición 2.6 se deduce que $\omega_0(T) < 0$.

En el caso $p = 2$, si $s(A) < \alpha < 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ volvemos a utilizar el lema previo y obtenemos que

$$R(z, A)f = \int_0^\infty e^{-zt}T(t)f\,dt,$$

donde $z = \alpha + i\beta$. Como T es un semigrupo positivo puede verificarse fácilmente que

$$\|R(z, A)f\| \leq \|R(\alpha, A)\|\|f|, \quad f \in L^2(\Omega).$$

Por lo tanto $\|R(z, A)\| \leq \|R(\alpha, A)\|$ lo que por el Corolario 3.5 muestra que $\omega_0(T) < 0$. ■

El resultado anterior se mantiene para $1 \leq p < \infty$. Una demostración se encuentra en [24].

Referencias

[1] **Arendt, W.**, *Spectrum and Growth of Positive Semigroups*. Lect. Notes in Pure and Applied Maths., 168, Marcel Dekker, New York, 1995.

[2] **Balakrishnan, A.V.**, *Strong Stabilizability and the Steady State Riccati Equation*. Appl. Math. and Optim., 8, 335-345, 1981.

[3] **Batty, C. y Phóng, V.Q.**, *Stability of Strongly Continuous Representations of Abelian Semigroups*. Math. Z., 209, 75-88, 1992.

[4] **Benchimol, C.D.**, *Feedback Stabilizability in Hilbert Spaces*. Appl. Math. and Optim., 4(3), 225-245, 1978.

[5] **Clement, Ph., Heijmans, H. et al.**, *One-Parameter Semigroups*. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[6] **Curtain, R. y Pritchard, A.J.**, *Infinite Dimensional Linear Systems Theory.* Lect. Notes in Control and Inf. Sciences, 8, Springer-Verlag, 1978.

[7] **Datko, R.**, *Uniform Asymptotic Stability of Evolutionary Processes in a Banach Space.* SIAM J. Math. Anal., 3(3), 428-445, 1972.

[8] **Gibson, J.S.**, *A Note on Stabilization of Infinite Dimensional Linear Oscillators by Compact Linear Feedback.* SIAM J. Control and Opt., 18(3), 311-316, 1980.

[9] **Guo, B.Z.**, *The Characterization of the Exponential Stability of a Family of C_0-Semigroups by Infinitesimal Generators.* Semigroup Forum, 56, 78-83, 1998.

[10] **Hale, J.**, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, 1977.

[11] **Hale, J. y Lunel, S.M.**, *Introduction to Functional Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[12] **Henríquez, H.**, *On Non-exact Controllable Systems.* International J. Control, 42(1), 71-83, 1985.

[13] **Henríquez, H.**, *Estabilidad de Sistemas.* CUBO Matemática Educacional, Vol. 2, 257-286, 2000.

[14] **Hino, Y., Murakami, S. y Naito, T.**, *Functional Differential Equations with Infinite Delay.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[15] **Hirsch, M.W. y Smale, S.**, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, New York, 1974.

[16] **Latushkin, Y. y Montgomery-Smith, S.**, *Evolutionary Semigroups and Lyapunov Theorems in Banach Spaces*, J. Func. Anal., 127(1), 1995, 173-197.

[17] **Levan, N. y Rigby, L.**, *Strong Stabilizability of Linear Contractive Control Systems on Hilbert Space.* SIAM J. Control and Opt., 17(1), 23-35, 1979.

[18] **Nagel, R.**, *One Parameter Semigroups of Positive Operators*, (Editor), Lect. Notes in Maths., 1184, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[19] **Neerven, J. van**, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators. Birkhäuser Verlag*, Basel, 1996.

[20] **Pazy, A.**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[21] **Pritchard, A.J. y Zabczyk, J.**, *Stability and Stabilizability of Infinite Dimensional Systems.* SIAM Review, 23(1), 25-52, 1981.

[22] **Schechter, M.**, *Principles of Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1971.

[23] **Triggiani, R.**, *On the Stabilizability Problem in Banach Space.* J. Math. Anal. Appl., 52, 383-403, 1975.

[24] **Weis, L.**, *The Stability of Positive Semigroups on L_p Spaces.* Seminar Notes in Functional Analysis and PDEs, 455-462, 1993–1994.

[25] **Wu, J.**, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[26] **Zabczyk, J.**, *A Note on C_0-Semigroups.* Bull. Acad. Pol. Sci., XXIII, 895-898, 1975.