Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

UNA INTRODUCCIÓN A TEORÍA ESPECTRAL DE OPERADORES

Carlos Lizama[1]
Departamento de Matemática y C.C.
Universidad de Santiago de Chile
Casilla 307, Correo 2, Santiago, Chile.

Resumen

El objetivo de este artículo de divulgación es mostrar como se podría realizar un tránsito natural entre un curso de Álgebra Lineal y uno en Teoría de Operadores.

La columna vertebral que guía este trabajo es la idea de diagonalización, que es la pieza fundamental en un primer curso de Algebra Lineal a nivel de pregrado. Comenzando de esta idea, la incorporación de elementos de Análisis Funcional y Teoría de Operadores es implementada por el requerimiento natural de nuevos conceptos a través del análisis de situaciones de abstracción matemática. El contenido del texto es reforzado mediante varios ejemplos y aplicaciones a problemas físicos y biológicos.

[1]Parcialmente financiado por DICTY (USACH)

Contenidos

1. Introducción

Un sistema de n ecuaciones diferenciales con n funciones desconocidas se puede escribir como

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1}$$

donde A es una matriz $n \times n$ de números reales o complejos.

Para resolver la ecuación (1) se puede esperar que la solución tenga la forma e^{At}, donde

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2}$$

Si A es una matriz *diagonal*, entonces (2) es muy fácil de calcular. En otro caso, debemos ver si A es *diagonalizable*.

El propósito de este artículo es estudiar el problema de diagonalización en un amplio contexto, a fin de que sirva como material de introducción al estudio de Teoría Espectral de Operadores.

Comenzando con el caso finito-dimensional, familiar de un curso de Algebra Lineal, encontramos la respuesta al problema de diagonalización (Teorema 1.2.6). Las primeras aplicaciones surgen en el estudio de un modelo biológico sencillo de crecimiento de poblaciones.

Si un operador lineal T representa a una matriz A en un espacio vectorial con producto interno V de dimensión finita , entonces se puede formular alternativamente la diagonalización de una matriz en el *teorema espectral* (Teorema 1.2.6). Aparecen, de manera natural, dos tipos especiales de operadores: Autoadjuntos y Normales.

El teorema espectral permite extender el proceso de diagonalización a operadores lineales en espacios de Hilbert. Surgen los *operadores compactos* y su importante aplicación a problemas de tipo Sturm-Liouville como, por ejemplo, pandeo de vigas y vibraciones de cuerdas.

Si T es un operador compacto y autoadjunto o bien compacto y normal, se puede aún formular el teorema espectral (Teoremas 2.2.5 y 2.2.7). Sin embargo, si T no es compacto, pero es ya sea autoadjunto o normal en un espacio de Hilbert podemos reinterpretar y luego extender algunas nociones. Surge de esta forma el concepto de *Familia espectral* (Definición 2.3.2). Con este concepto, el teorema espectral es nuevamente establecido (Teoremas 2.4.5 y 2.4.7) . Una aplicación importante constituye el *teorema espectral para operadores unitarios.*

Operadores lineales en espacios de Hilbert que no son acotados surgen en la práctica, por ejemplo en el estudio de la ecuación de Schrödinger, fundamental en mecánica cuántica. A fin de establecer un teorema espectral en este caso, debemos extender la noción de operador autoadjunto y operador acotado surgiendo los operadores cerrados, como una forma débil de continuidad.

Finalmente, en la última parte, retomamos la noción de función exponencial, ahora en el contexto de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios. Entonces, el concepto de operador cerrado y autoadjunto es conectado con el generador infinitesimal de un grupo, por medio del Teorema de Stone.

El material de esas notas deja como ejercicios para el lector la verificación de los ejemplos. La mayoría de los resultados son presentados sin demostración a fin de dar una visión general de las ideas más que de los argumentos técnicos que, en todo caso, el lector interesado puede encontrar en la bibliografía al final del texto.

1.1. El Caso Finito Dimensional

Consideremos el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales con n funciones desconocidas:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned}$$

donde las cantidades a_{ij} son números reales.

Ahora sea

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

y se define

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces, si se define la matriz de $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

el sistema se puede escribir como

$$x'(t) = Ax(t). \tag{1,1,1}$$

Para resolver la ecuación (1.1.1) se puede esperar que la solución tenga la forma e^{At}. Pero qué significa e^{At} ?.

Definición 1.1.1 *Sea A una matriz de $n \times n$ con elementos reales (o complejos). Entonces e^A es una matriz de $n \times n$ definida por*

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{1,1,2}$$

Note que la serie anterior es convergente.

Con la definición anterior podemos resolver (1.1.1) como sigue

Teorema 1.1.2 *Para cualquier vector constante x_0, $x(t) = e^{At}x_0$ es una solución de (1.1.1) que satisface $x(0) = x_0$.*

Demostración Usando (1.1.2):

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!}.$$

Pero como A es una matriz constante, se tiene

$$\frac{d}{dt} t^k A^k = \frac{kt^{k-1}}{k!} A^k = A\left[A^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right].$$

Entonces, se obtiene

$$x'(t) = \frac{d}{dt} e^{At}x_0 = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x_0}{k!} = Ae^{At}x_0 = Ax(t).$$

Por último, como $e^{A\cdot 0} = e^0 = I$, se tiene $x(0) = e^{A\cdot 0}x_0 = Ix_0 = x_0$. ■

Queda un problema importante: Cómo se calcula e^{At} de manera práctica?.

Definición 1.1.3 *Se dice que dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que*

$$B = C^{-1}AC.$$

Teorema 1.1.4 *Sean B y A matrices semejantes y sea $B = C^{-1}AC$, entonces*

$$e^{At} = Ce^{Bt}C^{-1}. \tag{1,1,3}$$

Demostración Primero se observa que

$$\begin{aligned} A^n &= (CBC^{-1})^n = (CBC^{-1})(CBC^{-1})...(CBC^{-1}) \\ &= CB(C^{-1}C)B(C^{-1}C)B(C^{-1}C)...(C^{-1}C)BC^{-1} \\ &= CB^nC^{-1}. \end{aligned}$$

Sigue entonces que $(At)^k = C(Bt)^kC^{-1}$. Así ,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C(Bt)^k C^{-1}}{k!} = C\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Bt)^k}{k!}\right] C^{-1} = Ce^{Bt}C^{-1}.$$

■

Definición 1.1.5 *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.*

En vista de la definición y teorema anteriores, si una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, entonces existe una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$ es diagonal y, además, $e^{At} = Ce^{Dt}C^{-1}$. Esto responde completamente a la pregunta de como calcular e^{At}, al menos para matrices diagonalizables. Sin embargo, tenemos ahora el problema de saber como es la matriz D.

La respuesta a esta pregunta la otorga el siguiente resultado.

Teorema 1.1.6 *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n*

vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la matriz D semejante a A está dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A, entonces

$$D = C^{-1}AC.$$

Demostración. Ver [Grossmann] Teorema 2, p.567.

Corolario 1.1.7 *Si una matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.*

De acuerdo a este resultado, las matrices de $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes se pueden expresar en una forma especialmente sencilla mediante una transformación de semejanza. Por fortuna, como la "mayor parte" de los polinomios tienen raíces distintas, la "mayor parte" de las matrices tendrán valores propios distintos: No es dificil ver, intuitivamente, porque se cumple esto. Si $n = 2$, por ejemplo, entonces la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ tiene raices reales si y sólo si $a^2 = 4b$, un evento muy improbable si a y b se eligen aleatoriamente. Por lo tanto, es posible decir que la mayoria de los polinomios tienen raices distintas. Asi, la mayoria de las matrices tienen valores propios distintos con lo cual la "mayor parte" de las matrices son diagonalizables. Sin embargo, las matrices que no son diagonalizables surgen en la práctica. En este caso, todavía es posible demostrar que la matriz es semejante a otra, una matriz más sencilla, pero la nueva matriz no es diagonal y es más difícil obtener la matriz de transformación C.

Teorema 1.1.8 (Forma Canónica de Jordan) *Sea A una matriz real o com-*

pleja de $n \times n$. Entonces existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$C^{-1}AC = J$$

donde J es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A. Más aún, la matriz de Jordan J es única excepto por el orden en el que aparecen los bloques de Jordan.

Demostración. Ver [Birkhoff-MacLane], p.311.

Como un ejemplo, se aplicarán los cálculos a un modelo biológico sencillo de crecimiento de población.

Suponga que en un ecosistema existen dos especies S_1 y S_2 que interactúan. Se denotan las poblaciones de las especies en el tiempo t por $x_1(t)$ y $x_2(t)$. Un sistema que gobierna el crecimiento relativo de las dos especies es

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned}$$

las constantes a, b, c y d se pueden interpretar de la siguiente manera: si las especies compiten, entonces es razonable tener $b < 0$ y $c < 0$. Esto se cumple porque los incrementos en la población de una especie disminuirán el crecimiento de la otra.

Un segundo modelo es una relación de depredador-presa. Si S_1 es la presa y S_2 es el depredador (S_2 se come a S_1), entonces es razonable tener $b < 0$ y $c > 0$ ya que un incremento en la especie depredadora causa un decremento en la especie presa, mientras que un incremento en la especie presa causará un incremento en la especie depredadora (porque tendrá más comida).

Por último, en una relación simbiótica (cada especie vive de la otra), es posible que se tenga $b > 0$ y $c > 0$.

Ejemplo 1.1.9 (Modelo competitivo) Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

donde se supondrá que t se mide en años. Suponga que las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 90$ y $x_2(t) = 150$.

Se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ con vectores propios correspondientes $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz A es diagonalizable y se tiene

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

A fin de encontrar las poblaciones de ambas especies para $t > 0$ calculamos

$$\begin{aligned} e^{At} &= Ce^{Dt}C^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^t & -e^t \\ -2e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por último, la solución al sistema está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}x_0 = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -e^t - 2e^{4t} & -e^t + e^{4t} \\ -2e^t + 2e^{4t} & -2e^t - e^{4t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 150 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -240e^t - 30e^{4t} \\ -480e^t + 30e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80e^t + 10e^{4t} \\ 160e^t - 10e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, despues de 6 meses ($t = 1/2$ años),$x_1(t) = 80e^{1/2} + 10e^2 \approx 206$ individuos, mientras que $x_2(t) = 160e^{1/2} - 10e^2 \approx 190$ individuos.

De manera más significativa, $160e^{t} - 10e^{4t} = 0$ cuando $t = (ln16)/3 \approx 0{,}92$ años ≈ 11 meses. Así, la segunda especie estará eliminada después de sólo 11 meses aunque comenzó con una población mayor.

Ejemplo 1.1.10 (Un modelo depredador-presa) Se considera el siguiente modelo en el que la especie 1 es la presa y la especie 2 es el depredador:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

Encontramos las poblaciones de las dos especies, si las poblaciones iniciales son $x_1(0) = 500$ y $x_2(0) = 100$.

En este caso

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y el único valor propio es $\lambda = 3$ con un sólo vector propio $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Luego A no es diagonalizable en este caso.

Una solución para la ecuación $(A - 3I)v_2 = v_1$ es $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} = & 3 & 1 \\ & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} = & e^{3t} & te^{3t} \\ & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} e^{At} &= Ce^{Jt}C^{-1} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} = & 2-t & 1-t \\ & -1 & -1 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Asi la solución al sistema es

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At}x_0 = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} 500-600t \\ 100+600t \end{pmatrix}.$$

Es evidente que la especie presa será eliminada después de $\frac{5}{6}$ años $= 10$ meses, aún cuando comenzó con una población cinco veces mayor que la especie depredadora.

1.2. Operadores Autoadjuntos y Normales

Es bien sabido que a cada matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbf{K})$ se le puede asociar una transformación lineal. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces la transformación lineal asociada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.

Inversamente, dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podemos formar una matriz asociada $[T]$ con respecto a alguna base de R^n. Por ejemplo, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(x,y) = (x+y, x-y)$ entonces la matriz asociada con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1,-1),(-3,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ es

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Naturalmente, podemos escoger otra base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ en cuyo caso la matriz asociada será diferente.

Consideremos ahora, en general, un operador lineal $T : V \to V$ donde V es un espacio producto interno de dimensión finita.

Diremos que el *operador T es diagonalizable* si existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, tal que la matriz asociada a T en la base $\mathcal{B}$ sea diagonal.

Nuestro problema es caracterizar a los operadores diagonalizables. Con este objetivo, comenzaremos deduciendo primero algunas condiciones necesarias para T

Supongamos que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ es una base ortonormal de V con la propiedad

$$Tv_j = \lambda_j v_j, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Esto dice que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal formada por vectores propios de T y

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

El operador adjunto T^* está representado en esta misma base ordenada $\mathcal{B}$ por la matriz transpuesta conjugada; es decir

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, si V es un espacio producto interno *real*, los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son (claro está) reales y, por tanto, debe tenerse que $T = T^*$.

En otras palabras, si V es un espacio producto interno *real* de dimensión finita y T es un operador lineal para el que existe una base ortonormal de vectores propios, entonces T debe ser *autoadjunto (o simétrico)*. Recíprocamente se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.2.1 (Diagonalización de Operadores Autoadjuntos) *Sea V un espacio producto interno real de dimensión finita y sea T un operador lineal autoadjunto sobre V. Entonces existe una base ortonormal de V en la que cada vector es un vector propio de T.*

Demostración. Ver [Hoffman-Kunze], Teorema 18, p.310.

Corolario 1.2.2 *Sea A una matriz $n \times n$ con elementos reales. Existe una matriz (ortogonal) real P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal si, y sólo si, A es autoadjunta*

$A = A^T$.)

Resumiendo, el corolario anterior nos muestra que una matriz con coeficientes reales es diagonalizable si y sólo si es autoadjunta (ó simétrica). En otros términos, en un espacio vectorial *real* con producto interno V , un operador $T : V \to V$ es diagonalizable si y sólo si el operador T es autoadjunto.

Si V es un espacio producto interno *complejo*, los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no necesitan ser reales; es decir, T no necesita ser autoadjunto. Pero obsérvese que T debe satisfacer

$$TT^* = T^*T. \tag{1,2,1}$$

En efecto, dos matrices diagonales cualesquiera conmutan, y como T y T^* están ambos representados por matrices diagonales en la base ordenada $\mathcal{B}$, se tiene (1.2.1).

Es notable que, en el caso complejo, esta condición sea también suficiente para implicar la existencia de una base ortonormal de vectores propios.

Definición 1.2.3 *Sean V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Se dice que T es normal si $TT^* = T^*T$.*

Teorema 1.2.4 (Diagonalización de Operadores Normales) *Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita y T un operador normal sobre V. Entonces V tiene una base ortonormal que consiste de vectores propios de T. En particular, T es diagonalizable si y sólo si T es normal.*

Demostración. Ver [Hoffman-Kunze], Teorema 22, p.313.

Corolario 1.2.5 *Sea A una matriz $n \times n$ con elementos complejos. Existe una matriz (unitaria) P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal si, y sólo si,A es normal .*

Veremos que, en el caso infinito-dimensional, un operador lineal puede no tener valores propios. En tal caso, se requiere de una formulación alternativa de los resultados anteriores que pueda ser generalizada. Tal es el caso del siguiente teorema.

Teorema 1.2.6 (Espectral) *Sea T un operador autoadjunto sobre un espacio producto interno real V de dimensión finita . Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los valores propios distintos de T. Sea $W_j = Ker(T - \lambda_j)$ el espacio propio asociado a λ_j, y E_j la proyección ortogonal de V sobre W_j. Entonces* *(a)* W_i *es ortogonal a* W_j *si* $i \neq j$.

(b) V *es la suma directa de* $W_1, ..., W_n$ *y*

$$T = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j.$$

Demostración Sea u un vector de W_j , v un vector de W_i y supóngase que $i \neq j$. Entonces $(\lambda_j - \lambda_i) < u, v >= \lambda_j < u, v > -\lambda_i < u, v >=< \lambda_j u, v > - < u, \overline{\lambda_i} v >=< T(u), v > - < u, T^*(v) >= 0$ ya que T es autoadjunto y, como $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, se sigue que $< u, v >= 0$. Así, W_j es ortogonal a W_i si $i \neq j$.

Del hecho que V tiene una base ortonormal de vectores propios, se sigue que

$$V = W_1 + ... + W_n.$$

Si $v_j \in W_j (j = 1, ..., n)$ y $v_1 + ... + v_n = 0$, entonces

$$0 =< v_i, \sum_{j=1}^{n} v_j >= \sum_{j=1}^{n} < v_i, v_j >= ||v_i||^2$$

para cada i, con lo que V es la suma directa de $W_1, ..., W_n$. Finalmente, $E_1 + ... + E_n = I$ y

$$\begin{aligned} T &= TE_1 + ... + TE_n \\ &= \lambda_1 E_1 + ... + \lambda_n E_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j E_j. \end{aligned}$$

■

La representación anterior de T es en términos de proyecciones. Esto muestra como *el espectro de* T, esto es, *el conjunto de valores propios de* T, puede ser empleado para obtener una representación de T en función de operadores más simples.

El uso de tales proyecciones es muy natural. Sin embargo, la fórmula anterior no es del todo conveniente para su generalización a espacios de dimensión infinita ya que en tal caso, el espectro del operador puede ser más complicado.

2. El Caso Infinito Dimensional

En el capítulo anterior hemos estudiado matrices, equivalentemente transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, como una forma de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Este mismo problema lo podemos plantear para sistemas "infinitos" de ecuaciones, formalmente:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + ... + a_{1n}x_n(t) + ... \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + ... + a_{2n}x_n(t) + ... \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + ... + a_{nn}x_n(t) + ... \\ &\vdots \end{aligned}$$

esto es, siempre formalmente, operadores $T : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$. En este caso debemos primero entender que es "$\mathbb{R}^\infty$".

Intuitivamente, corresponde al conjunto,

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, ...)/x_i \in \mathbb{R}\}.$$

En este conjunto debemos introducir una noción apropiada de distancia entre puntos.

Ya que , por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ la distancia de un punto (x, y) a $(0, 0)$ es dada por

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

es natural entonces definir en $\mathbb{R}^\infty$ la distancia de un punto $(x_1, x_2, ...)$ a $(0, 0...)$ como

$$||(x_1, x_2, ...)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...} = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 \qquad (2,1)$$

sin embargo necesitamos justificar la convergencia de la serie. Como esto no siempre ocurre, restringiremos nuestro conjunto $\mathbb{R}^\infty$ al conjunto

$$l^2 = \left\{ (x_1, x_2, ...)/\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}.$$

Se puede verificar fácilmente que, con respecto a la norma en (2.1), l^2 es un espacio completo. Además, si $e_i = (\underbrace{0,..,0,1}_{i},0,...)$, entonces el conjunto $\{e_i\}$ constituye una *base* de l^2, en el sentido que es un conjunto ortogonal con respecto al producto interno

$$< (x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...) >= \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

y $\overline{span\{e_i\}} = l^2$. Más precisamente, dado cualquier vector $x \in l^2$, se tiene que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < x, e_i > e_i.$$

El espacio l^2 constituye un ejemplo de una noción más general, espacios de Hilbert, que recordamos ahora.

Definición *Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial H provisto de un producto interno $<,>$ tal que relativo a la norma $||x|| = \sqrt{< x, x >}$, H es un espacio normado completo.*

Geométricamente, un espacio de Hilbert es muy similar a l^2. Más aún, cualquier espacio de Hilbert separable es isomorfo a l^2.

2.1. Operadores Compactos

Una transformación lineal $T : l^2 \to l^2$, representa una matriz "infinita"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

A fin de estudiar tales "operadores" podemos hacer la siguiente observación: Consideremos los operadores $P_n : l^2 \to l^2$ definidos como

$$P_n(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

La representación matricial de tal operador es del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\dots \\ 0 & 1 & \dots & 0\dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1\dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$TP_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0\dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0\dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0\dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

en particular, cada operador TP_n posee rango finito.

Luego, al menos formalmente, $TP_n \to T$ cuando $n \to \infty$

Surge la pregunta natural: En qué sentido es la convergencia de TP_n a T?.

Teorema 2.1.1 *Sea H un espacio de Hilbert y denotemos por $\mathcal{B}(H)$ al conjunto de todos los operadores lineales y acotados en H. Entonces $\mathcal{B}(H)$ es un espacio normado completo con la norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \|Th\|.$$

Demostración. Ejercicio.

Definición 2.1.2 *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal $T : H \to H$ se dice compacto si puede ser aproximado, en la norma de $\mathcal{B}(H)$, por operadores de rango finito.*

Observación 2.1.3 Si $\mathcal{B}_{00}(H)$ denota el conjunto de operadores de rango finito, y $\mathcal{B}_0(H)$ denota el conjunto de operadores compactos, entonces $\mathcal{B}_0(H) = \overline{\mathcal{B}_{00}(H)}$, donde la clausura es en la norma de $\mathcal{B}(H)$.

Ejemplo 2.1.4 Suponga que $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2 < \infty$ y sea $T : l^2 \to l^2$ definido como

$$T(x_1, x_2, ...) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{1k}x_k, \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{2k}x_k, ...\right),$$

entonces T es compacto.

Observación 2.1.5 La condición

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2 < \infty$$

no caracteriza los operadores compactos en $\mathcal{B}(H)$. A modo de ejemplo, el operador $T : l^2 \to l^2$ definido por $T(x_1, x_2, ...) = (\frac{x_1}{\sqrt{1}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}, ...)$ es compacto, pero

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$$

diverge.

Proposición 2.1.6 *Sea H un espacio de Hilbert con base $\{e_n\}$; Sea $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $M := \sup_{n\geq 1}|\alpha_n| < \infty$. Sea*

$$Te_n = \alpha_n e_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces existe un operador lineal acotado $\hat{T} \in \mathcal{B}(H)$ que extiende a T y tal que $||\hat{T}|| = M$. El operador $\hat{T}$ es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración Ver [Conway], Proposition 4.6, p.42.

Es claro que existen operadores en espacios de dimensión infinita que no son necesariamente compactos. A modo de ejemplo consideremos los operadores $S : l^2 \to l^2$ definido como $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ y $T : l^2 \to l^2$ definido por $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ Note que $S^* = T$. Más aún, se puede verificar que $\sigma_p(S) = \emptyset$ pero $\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (Ver [Conway] prop. 6.5, p.209). Por otra parte, el operador identidad es siempre no compacto en dimensión infinita.

2.2. Teoría Espectral: El Caso Acotado

En lo que sigue H denotará un espacio de Hilbert con producto interno $<,>$. La siguiente definición es motivada por el caso de dimensión finita (Ver sección 1.2).

Definición 2.2.1 *Un operador $T \in \mathcal{B}(H)$ se dice diagonalizable si existe una base ortonormal para H que consiste de vectores propios de T.*

Recordemos, además, las siguientes definiciones.

Definición 2.2.2 *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ entonces el adjunto $T^* : H \to H$ se define como el único operador lineal acotado que satisface la relación*

$$< Tx, y > = < x, T^*y > \quad \textit{para cada } x, y \in H.$$

T se dice autoadjunto si $T = T^*$.

Observación 2.2.3 Un operador autoadjunto en un espacio de dimensión infinita puede no tener valores propios (en contraste con el caso finito-dimensional).

Como un ejemplo considere el operador de multiplicación $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $Tx(t) = tx(t)$.

Sin embargo, si T tiene valores propios, se puede decir lo siguiente.

Teorema 2.2.4 *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador autoadjunto. Entonces:*

1. *Todos los valores propios de T (si ellos existen) son reales.*

2. *Vectores propios correspondientes a valores propios diferentes de T son ortogonales.*

Demostración

1. Sea λ un valor propio de T y sea x el correspondiente vector propio. Entonces $x \neq 0$ y $Tx = \lambda x$. Ya que T es autoadjunto se obtiene $\lambda < x, x > = < \lambda x, x > = < Tx, x > = < x, Tx > = < x, \lambda x > = \overline{\lambda} < x, x >$. Luego, $\lambda = \overline{\lambda}$, esto es, λ es real.

2. Sean λ, μ valores propios distintos de T y sean x e y los correspondientes vectores propios. Ya que T es autoadjunto y μ es real se obtiene $\lambda < x, y > = < \lambda x, y > = < Tx, y > = < x, Ty > = < x, \mu y > = \mu < x, y >$. Luego $< x, y > = 0$, esto es, x e y son ortogonales. ■

El siguiente resultado es notable

Teorema 2.2.5 (Espectral para Operadores Compactos y Autoadjuntos) *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto y autoadjunto, entonces T tiene solamente un número contable de vectores propios distintos. Si $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ son los valores propios distintos de cero de T, y P_n es la proyección de H sobre $Ker(\lambda_n - T)$ entonces*

(a) $P_n P_m = P_m P_n = 0$ si $n \neq m$

(b) Cada λ_j es real y

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

donde la serie converge a T en la métrica definida por la norma de $\mathcal{B}(H)$.

Demostración (sketch) Como T es compacto y autoadjunto, entonces existe un valor propio λ_1 de T tal que $|\lambda_1| = ||T||$. Sea P_1 la proyección de H sobre $Ker(\lambda_1 - T) =: E_1$ y definamos $H_2 := E_1^{\perp}$. Sea $T_2 :=$ la restricción de T a H_2. Entonces se puede mostrar que T_2 es un operador autoadjunto y compacto. Luego, existe un valor propio λ_2 de T_2 tal que $|\lambda_2| = ||T_2||$.

Repitiendo el proceso anterior y usando inducción se obtiene una sucesión $\{\lambda_n\}$ de valores propios de T tales que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ y $|\lambda_{n+1}| = ||T|(E_1 \oplus ... \oplus E_n)^{\perp}||$.

Se concluye que existe $\alpha \geq 0$ tal que $|\lambda_n| \to \alpha$. Finalmente, usando que T es compacto y H es Hilbert se puede mostrar que $\alpha = 0$.

Sea ahora P_n la proyección de H sobre $Ker(\lambda_n - T) =: E_n$. Entonces, se puede ver que

$$\left|\left| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \right|\right| = ||T|(E_1 \oplus ... \oplus E_n)^{\perp}|| = |\lambda_{n+1}| \to 0$$

cuando $n \to \infty$ lo que prueba el teorema. ■

El resultado anterior generaliza el teorema espectral 1.2.6 al caso de dimensión infinita ya que, obviamente, la suma anterior podría ser finita.

Usando el teorema espectral se puede virtualmente responder cualquier pregunta sobre operadores compactos autoadjuntos.

Como una aplicación de este resultado consideraremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.6: Pandeo de Vigas

Supongamos que tenemos una viga o columna de longitud 1 la cual está asegurada en los puntos O y R. Esta viga está inicialmente derecha de modo que su eje (o curva elástica) coincide con el eje y . Debido a una carga axial de magnitud constante P supongamos que la viga sufre una deflexión.

La magnitud de la deflexión de la viga está dada por una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -Py.$$

Puesto que el extremo de la viga tiene cero deflexión en $x = 0$ y $x = 1$, debemos también tener

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Si definimos el operador $L : D(L) \to L^2[0,1]$ por $L(h) = h''$, donde

$$D(L) = \{h \in C^2[0,1] : h(0) = h(1) = 0\},$$

y un operador $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ por

$$T(f)(x) = \int_0^x y(x-1)f(y)dy + \int_x^1 x(y-1)f(y)dy$$

entonces T es un operador autoadjunto y compacto, tal que $Ran(T) = D(L)$, $LT(f) = f$ para cada $f \in L^2[0,1]$, y $TL(h) = h$ para cada $h \in D(L)$.

Concluimos que: Si $\lambda \neq 0$, λ es valor propio de L si y sólo si λ^{-1} es valor propio de T, y que los vectores propios asociados son los mismos.

Como T es compacto, sigue que L tiene sólo una cantidad contable de valores propios, digamos $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$, ninguno de ellos cero.

Si $\lambda = \lambda_n$ para algún n, entonces es claro que existe un $h \neq 0$ tal que $L(h) = \lambda h$, esto es, la ecuación tiene una solución no trivial.

Si $\lambda \neq \lambda_n$ para cada n, entonces la ecuación no tiene solución excepto por la trivial.

Más precisamente, en este caso los valores propios son

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \quad n = 1, 2, 3...$$

y los correspondientes vectores propios están dados por

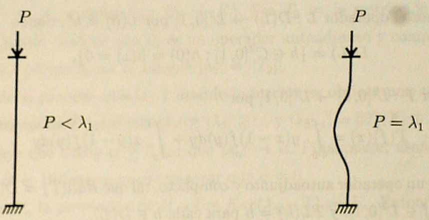
$$f_n(x) = B_n \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2,2,1}$$

donde los coeficientes que pueden depender de n se denotan por B_n.

Fisicamente, los valores propios λ_n representan las *cargas críticas* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ para las cuales las correspondientes deflexiones (vectores propios) están dadas por (2.2.1)

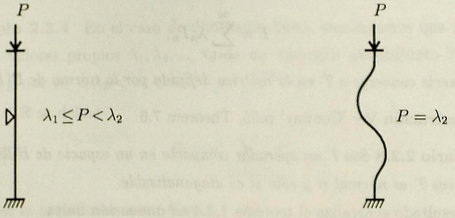
Para una carga dada $P < \lambda_1$, la cual es la carga critica más pequeña, la deflexión es cero, asi que la viga puede soportar tal carga.

Para $P = \lambda_1$ la viga se pandeará como se indica en la siguiente figura (o en la dirección opuesta), esto es, la viga fallará a soportar la carga λ_1

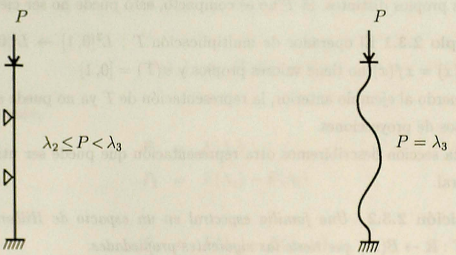


Para prevenir tal pandeo es necesario proporcionarle un apoyo en el punto medio $x = 1/2$ de la viga para que no ocurra deflexión. Si esto se hace la viga no se pandeará como se muestra en la figura inferior hasta que se alcance la carga critica λ_2.

La carga λ_2 hace que la viga se pandee de la manera como se muestra en la figura abajo, de modo que la viga falla a soportar la carga λ_2.



Para prevenir este doblamiento, sin embargo, podemos proveer dos apoyos adicionales en $x = 1/3$ y $x = 2/3$. Si esto se hace la viga no se doblará hasta que se alcance la carga critica λ_3, y esto a su vez causa pandeo como se muestra en la figura a continuación. Continuando el proceso de apoyos adicionales se permiten cargas criticas más grandes.



El siguiente resultado generaliza el teorema anterior al caso de operadores normales.

Teorema 2.2.7 (Espectral para Operadores Compactos y Normales) *Sea $T \in \mathcal{B}(H)$ un operador compacto y normal, definido en un espacio de Hilbert complejo H, entonces T tiene solamente un número contable de vectores propios* *distintos. Si* $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ *son los valores propios distintos de cero de* T, *y* P_n *es la proyección de* H *sobre* $Ker(\lambda_n - T)$ *entonces*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

donde la serie converge a T *en la métrica definida por la norma de* $\mathcal{B}(H)$.

Demostración Ver [Conway] p.55, Theorem 7.6

Corolario 2.2.8 *Sea* T *un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo* H. *Entonces* T *es normal si y sólo si es diagonalizable.*

Este resultado generaliza el teorema 1.2.4 en dimensión finita.

2.3. El Caso No Compacto

En relación al teorema espectral de la sección anterior, el hecho fundamental utilizado es que si T es un operador compacto entonces hay una cantidad *contable* de valores propios distintos. Si T no es compacto, esto puede no ser cierto.

Ejemplo 2.3.1 El operador de multiplicación $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definido por $(Tf)(x) = xf(x)$ no tiene valores propios y $\sigma(T) = [0,1]$

De acuerdo al ejemplo anterior, la representación de T ya no puede ser realizada en términos de proyecciones.

En esta sección describiremos otra representación que puede ser utilizada en el caso general.

Definición 2.3.2 *Una familia espectral en un espacio de Hilbert* H *es una función* $E : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ *que tiene las siguientes propiedades:*

(a) $E(t)$ *es una proyección ortogonal para cada* $t \in \mathbb{R}$,

(b) $E(s) \leq E(t)$ *para* $s \leq t$ *(esto es* $< E(t)x - E(s)x, x > \geq 0$ *para cada* $x \in H$*)*

(c) $E(t+\epsilon)x \to E(t)x$ *cuando* $\epsilon \to 0^+$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$ *y cada* $x \in H$,

(d) $E(t)x \to 0$ *cuando* $t \to -\infty$, *y* $E(t)x \to x$ *cuando* $t \to \infty$, *para cada* $x \in H$.

Observación 2.3.3 (b) es equivalente a $E(t)E(s) = E(s)E(t) = E(t)$.

La idea central en la definición anterior es que en vez de las proyecciones $P_1, P_2, ...P_n$ consideremos *sumas* de tales proyecciones.

Ejemplo 2.3.4 En el caso de dimensión finita, supongamos que (por simplicidad) los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de un operador autoadjunto T son todos diferentes, y que $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$.

Para $t \in \mathbb{R}$ se define

$$E(t) = \sum_{\{j:\lambda_j \leq t\}} P_j,$$

donde P_j es la proyección sobre $Ker(\lambda_j - T)$.

De la definición, se observa que el operador $E(t)$ es la proyeccíon de H sobre el subespacio V_t generado por todos aquellos x_j para los cuales $\lambda_j \leq t$. Además, se tiene:

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= P_1 \\ E(\lambda_2) &= P_1 + P_2 \\ &\vdots \\ E(\lambda_n) &= P_1 + ... + P_n \end{aligned}$$

e inversamente,

$$\begin{aligned} P_1 &= E(\lambda_1) \\ P_2 &= E(\lambda_2) - E(\lambda_1) \\ &\vdots \\ P_n &= E(\lambda_n) - E(\lambda_{n-1}). \end{aligned}$$

Observemos que $E(t)$ es constante en el intervalo $[\lambda_{j-1}, \lambda_j](j = 2, ..., n)$ luego podemos reescribir como

$$P_j = E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0)$$

donde $\lambda_j - 0$ indica el limite por la izquierda.

Escribimos entonces

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_j x = \sum_{j=1}^{n} (E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))x.$$

Luego,

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))x.$$

Ejemplo 2.3.5 Sea $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cada $t \in \mathbb{R}$ sea

$$M(t) = \{x \in (0,1) : g(x) \leq t\}$$

La función $E : \mathbb{R} \to B(L^2(0,1))$ definida por $E(t)f = \mathcal{X}_{M(t)} f$ define una familia espectral en $L^2(0,1)$.

2.4. Teoría Espectral de un Operador Autoadjunto Acotado

Dado un operador lineal autoadjunto y acotado $T : H \to H$, donde H es un espacio de Hilbert, se le puede asociar una única familia espectral $E(t)$, la cual será posteriormente utilizada para obtener una representación espectral de T.

Para definir $E(t)$ se necesita el operador

$$T_\lambda = T - \lambda I,$$

la raíz cuadrada positiva de T_λ^2, esto es

$$|T_\lambda| = (T_\lambda^2)^{1/2}$$

y el operador

$$T_\lambda^+ = \frac{1}{2}(|T_\lambda| + T_\lambda).$$

llamada la parte positiva de T_λ.

Teorema 2.4.1 *Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado y autoadjunto. Sea $E(\lambda)$ (λ real) la proyección de H sobre $Ker(T_\lambda^+)$. Entonces $E(\lambda)$ es la familia espectral de T.*

Demostración Ver [Kreyszig].

Ejemplo 2.4.2 Sea P una proyección ortogonal en H. Entonces

$$E_P(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ I - P & \text{para } 0 \leq t < 1, \\ I & \text{para } t \geq 1 \end{cases}$$

es la familia espectral de P.

En particular, la familia espectral del operador cero es dada por

$$E_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ I & \text{para } t \geq 0, \end{cases}$$

y la familia espectral del operador identidad es

$$E_I(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 1, \\ I & \text{para } t \geq 1 \end{cases}.$$

Ejemplo 2.4.3 Sea T un operador autoadjunto y compacto en H, sea $\{\lambda_j\}$ la sucesión de valores propios distintos de cero de T y $\{P_j\}$ la sucesión de las proyecciones ortogonales sobre los subespacios $Ker(T - \lambda_j I)$ y P_0 la proyección ortogonal sobre $Ker(T)$. Entonces

$$E(t)f = \begin{cases} \sum\limits_{\{j:\lambda_j \leq t\}} P_j f & \text{para } t < 0, \\ \sum_{\{j:\lambda_j \leq t\}} P_j f + P_0 f & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

define la familia espectral de T.

Ejemplo 2.4.4 (Operador de Multiplicación) Sea $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ definida por

$$T(f)(x) = xf(x).$$

La familia espectral de T es dada por

$$E(\lambda)f = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0, \\ g_\lambda & \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1, \\ f & \text{si } \lambda > 1. \end{cases}$$

donde

$$g_\lambda(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \lambda, \\ 0 & \text{si } \lambda \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 2.4.5 (Espectral para Operadores Autoadjuntos) *Sea $T : H \to H$ un operador lineal acotado y autoadjunto. Entonces T tiene la representación espectral*

$$T = \int \lambda dE(\lambda)$$

donde $E(\lambda)$ es la familia espectral asociada a T.

Demostración ver [Weidmann] Theorem 7.17, p.191.

En el caso de operadores normales podemos hacer un trabajo similar. Necesitamos, sin embargo, generalizar el concepto de familia espectral al caso complejo como sigue.

Definición 2.4.6 *Sea H un espacio de Hilbert. Una función $G : \mathbb{C} \to B(H)$ es llamada una familia espectral compleja si existen familias espectrales reales E y F tales que*

$$G(t + is) = E(t)F(s) = F(s)G(t) \text{ para cada } s, t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.4.7 (Espectral para Operadores Normales) *Sea H un espacio de Hilbert complejo, y sea $T \in B(H)$ un operador normal. Entonces existe exactamente una familia espectral compleja G tal que*

$$T = \int_{\mathbb{C}} zdG(z).$$

Se tiene que $G(t + is) = E(t)F(s) = F(s)E(t)$ para $s, t \in \mathbb{R}$, donde E y F son las familias espectrales de los operadores autoadjuntos $A = (T + T*)/2$ y $B = (T - T*)/2i$ respectivamente.

Demostración ver [Weidmann] Theorem 7.31, p.213.

Ejemplo 2.4.8 Sea T un operador normal compacto en un espacio de Hilbert H sobre $\mathbb{C}$. Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ los valores propios no cero, P_j es la proyección ortogonal sobre $Ker(\lambda_j - T), \lambda_0 = 0$ y P_0 la proyección ortogonal sobre $Ker(T)$. Entonces la fórmula

$$G(z) = \sum\{P_j : j \in \mathbb{N}_0, Re\lambda_j \leq Rez, Im\lambda_j \leq Imz\} \text{ para } z \in \mathbb{C}$$

define una familia espectral compleja.

2.5. Un Ejemplo: Teorema Espectral para Operadores Unitarios

Recordemos la siguiente

Definición 2.5.1 *Un operador lineal acotado $T : H \to H$, donde H es un espacio de Hilbert, se dice un operador unitario si T es biyectivo y $T^* = T^{-1}$.*

Dado un operador unitario U, existe un operador lineal acotado y autoadjunto S tal que

a) $\sigma(S) \subset [-\pi, \pi]$

b) $U = e^{iS} = cos(S) + isen(S)$.

Del teorema espectral para operadores autoadjuntos obtenemos:

Teorema 2.5.2 (Espectral para Operadores Unitarios) *Sea $U : H \to H$ un operador unitario en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces existe una familia espectral $E(\theta)$ en $[-\pi, \pi]$ tal que*

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} dE(\theta).$$

Demostración (sketch) Dado un operador unitario U, se puede mostrar que existe un operador lineal acotado y autoadjunto S tal que $\sigma(S) \subset [-\pi, \pi]$ y

$$U = e^{iS} = cosS + isenS.$$

Por el Teorema 2.4.5 se tiene que

$$S = \int \lambda dE(\lambda).$$

Luego,

$$U = e^{iS} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda).$$

Para los detalles ver [Kreyszig] Theorem 10.5-4, p.551. ∎

3. El Caso no Acotado

A través de esta sección serán considerados operadores lineales $T : D(T) \to H$, cuyo dominio $D(T)$ está en un espacio de Hilbert complejo H. Admitiremos que tal operador puede ser no acotado.

Recordemos la siguiente

Definición *Sean X e Y espacios normados y sea $T : D(T) \to Y$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$. Entonces T se dice un operador lineal cerrado si su gráfico*

$$G(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$$

es cerrado en el espacio normado $X \times Y$.

Ejemplo (Operador Diferencial) Sea $X = C[0,1]$ y $T : D(T) \to X$ definido por

$$T(f) = f'$$

donde $D(T)$ es el subespacio $C^1[0,1]$. Entonces T no es acotado pero es cerrado.

3.1. El Adjunto de un Operador no Acotado

En el caso acotado, el operador T^* es definido por

$$< Tx, y > = < x, T^*y >,$$

lo cual se puede escribir

(a) $< Tx, y > = < x, y^* >$

(b) $y^* = T^* y$.

T^* existe en H y es un operador lineal acotado con norma $||T^*|| = ||T||$.

En el caso no acotado, deseamos también usar (a) y (b). Luego, T^* se define para aquellos $y \in H$ para los cuales existe y^* tal que (a) vale para cada $x \in D(T)$.

Sin embargo, para que T sea una función bien definida, para cada y que se supone pertenece al dominio $D(T^*)$ de T^*, el correspondiente $y^* = T^* y$ debe ser único. Esto es cierto si y sólo si T es densamente definido, esto es, $D(T)$ es denso en H.

Definición 3.1.1 *Sea $T : D(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert H sobre $\mathbb{C}$. Entonces el operador adjunto $T^* : D(T) \to H$ de T se define como sigue:*

El dominio $D(T^*)$ de T^* consiste de todos los $y \in H$ para los cuales existe $y^* \in H$ tal que

$$< Tx, y > = < x, y^* > \quad \text{para cada } x \in D(T).$$

Para tales $y \in D(T^*)$ el operador adjunto T^* se define en términos de tal y^* por

$$y^* = T^* y.$$

Los teoremas espectrales en el caso autoadjunto y normal valen también para operadores normales prácticamente sin variación. Por ejemplo:

Teorema 3.1.2 (Espectral para Operadores Normales) *Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea T un operador normal (no necesariamente acotado) . Entonces existe exactamente una familia espectral compleja G tal que*

$$T = \int_{\mathbb{C}} z dG(z).$$

Se tiene que $G(t + is) = E(t)F(s) = F(s)E(t)$ para $s, t \in \mathbb{R}$, donde E y F son las familias espectrales de los operadores autoadjuntos $A = \overline{(T + T^*)}/2$ y $B = \overline{(T - T^*)}/2i$ respectivamente.

Demostración ver [Weidmann] Theorem 7.32, p.215.

Ejemplo 3.1.3 (Operador Multiplicación)

Consideremos el operador $T : D(T) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(f)(x) = xf(x)$$

donde $D(T) \subset L^2(\mathbb{R})$.

El dominio de $D(T)$ consiste de todos los $x \in L^2(\mathbb{R})$ tales que $Tf \in L^2(\mathbb{R})$, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Esto implica que $D(T) \neq L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, T es densamente definido.

(*) El operador de multiplicación no es acotado, es autoadjunto y no tiene valores propios.

La familia espectral de T es $E(t)$ donde $t \in \mathbb{R}$ y

$$E(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(-\infty, t)$$

es la proyección de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(-\infty, t)$ considerado como un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$, esto es

$$E(t)f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x < t, \\ 0 & \text{para } x \geq t \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.4 (Operador de Diferenciación)

Consideramos ahora el operador $D : D(D) \to L^2(\mathbb{R})$ definido como

$$D(f) = if'.$$

El dominio $D(D)$ de D consiste de todas las funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ que son absolutamente continuas en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y tal que $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(*) El operador de diferenciación es densamente definido y no es acotado. Además, D es autoadjunto, no tiene valores propios y su espectro es $\mathbb{R}$.

3.2. El Grupo de Operadores Unitarios

El resultado más importante de la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert es el Teorema de Stone. Para ver este resultado, necesitamos de la siguiente definición que generaliza el concepto de función exponencial a espacios de Hilbert.

Definición 3.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert. Una familia $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de operadores lineales y acotados en H se llama un grupo a un parámetro si:*

$$B(0) = I \text{ y } B(s)B(t) = B(s+t)$$

El grupo a un parámetro $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ se dice fuertemente continuo si la función

$$B(\cdot)f : \mathbb{R} \to H, \quad t \to B(t)f$$

es continua para cada $f \in H$.

Ejemplos 3.2.2

(1) Sea A un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H. Entonces $B(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$ es un grupo fuertemente continuo.

(2) Sea A un operador lineal acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces $S(t) = e^{iAt}, t \in \mathbb{R}$, es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios, esto es $S(t)S(t)^* = S(t)^*S(t) = I$.

Definición 3.2.3 *Sea $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un grupo fuertemente continuo de operadores en H. El operador A definido por las fórmulas*

$$D(A) = \{f \in H : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B(t) - I)f \text{ existe } \},$$

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B(t) - I)f \text{ para } f \in D(A)$$

es llamado el generador infinitesimal de $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Se puede ver que cada grupo fuertemente continuo posee un generador infinitesimal densamente definido.

En lo que sigue consideraremos *grupos unitarios* esto es, un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios.

Como una aplicación de los resultados anteriores se tiene el siguiente

Teorema 3.2.4 (Stone) *Sea T un operador lineal cerrado, densamente definido en un espacio de Hilbert complejo H. Entonces T es el generador infinitesimal de un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ si y sólo si iT es autoadjunto. Además,*

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} dE(s), \quad para\ t =\in \mathbb{R}.$$

donde $\{E(s) : s \in \mathbb{R}\}$ es la Familia Espectral del operador $-iT$

Demostración (sketch) Si T es el generador infinitesimal de un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $U(t)$, entonces $D(T)$ es denso en H y, para cada $f \in D(T)$:

$$-Tf = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(-t) - I)f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)^* f - f) = T^* f.$$

Esto implica $T = -T^*$ y, por lo tanto, $iT = (iT)^*$; Luego, iT es autoadjunto.

Inversamente, si iT es autoadjunto, entonces $D(T)$ es denso en H y $T = -T^*$. Luego, para cada $f \in D(T)$

$$< Tf, f >=< f, T^* f >= - < f, Tf >= -\overline{< Tf, f >}.$$

Luego, $Re < Tf, f >= 0$ para cada $f \in D(A)$. Esto prueba que T es disipativo (por definición). Ya que $T = -T^*$, también se tiene que $Re < T^* f, f >= 0$ para cada $f \in D(T^*) = D(T)$. Luego, T^* es también disipativo.

Concluimos que T y T^* son los generadores infinitesimales de semigrupos fuertemente continuos $U_+(t)$ y $U_-(t)$ respectivamente, tales que $||U_+(t)|| \leq 1$ y $||U_-(t)|| \leq 1$ (ver [Pazy] Corollary 4.4 p.15). Se define

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t), & \text{si } t \geq 0 \\ U_-(t), & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

Entonces $U(t)$ es un grupo y, ya que $U(t)^{-1} = U(-t)$, $||U(t)|| \leq 1$, $||U(-t)|| \leq 1$, se puede concluir que $U(t)$ es un grupo de operadores unitarios.

Finalmente, del teorema 2.5.2 observamos que

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} dE(s).$$

■

Ejemplo 3.2.5 Sea $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ un grupo de operadores unitario fuertemente continuo, y sea iT su generador infinitesimal. Entonces el problema con valores iniciales

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t) = Tu(t), \quad u(0) = f$$

tiene una única solución para cada $f \in D(T)$ y la solución es

$$u(t) = U(t)f.$$

En vista del Teorema 3.2.4 existe una relación biunívoca entre una clase importante de operadores, por una parte, y grupos unitarios por otra. Un análisis en profundidad de ésta última Teoría se puede hallar en [Pazy] o bien, el reciente texto [Engel-Nagel].

Bibliografía

[1] **Birkhoff, G. and MacLane, S.**, *A Survey of Modern Algebra* , 3 ed., Mac Millan, New York, 1965.

[2] **Conway, J.**, *A Course in Functional Analysis*, Second edition, Springer, New York, 1990.

[3] **Engel, K-J. and Nagel, R.**, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.

[4] **Grossmann, S.**, *Álgebra Lineal* Quinta edición, Mc.Graw Hill, México, Nueva York, 1996.

[5] **Hoffmann, K. and Kunze, R.**, *Algebra Lineal*, Mc Graw Hill, Mexico, 1973.

[6] **Kreyszig, E.**, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.

[7] **Pazy, A.**, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.

[8] **Weidmann, J.**, *Linear Operators in Hilbert Space*, Springer, New York, 1980.

[9] **Weinberger, H.**, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Editorial Reverté, Barcelona, 1988.

[10] **Zeidler, E.**, *Applied Functional Analysis*, Springer, New York, 1995,