Cubo Matemática Educacional
Vol. 4, Nº1, MAYO 2002

PRESENCIA DEL NÚMERO ϕ (RAZÓN ÁUREA)[1]

Rodolfo Baeza V.
Departamento de Matemática
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D, Temuco-Chile
http://dungun.ufro.cl/~rbaeza

1 Introducción

En la matemática existen algunos números nacidos para ser famosos. Uno de ellos es el *popular* $\boxed{\pi}$ (razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro). Otro es el *misterioso* $\boxed{e}$ (base de los logaritmos Neperianos). Ahora, en este resumen queremos analizar otro *interesante* número irracional, que designaremos con el símbolo $\boxed{\phi}$. Se trata del cero positivo del polinomio $x^2 - x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Es decir :

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{1.1}$$

Esta fría presentación de ϕ no se compadece con su permanente aparición en distintos campos de la matemática. Ya en la antigua Grecia, eran conocidas algunas de

[1]Proyecto N. 2009 Dirección de Investigación y Desarrollo, Universidad de la Frontera.

sus propiedades aunque se desconocía su valor. El aparece como un número mágico en el interés de personalidades tan notables como Pitágoras, en Grecia y Leonardo da Vinci, en Italia. Al respecto sugerimos leer el ensayo *The Divine Proportion: a study in mathematical beauty* escrita por **H.E.Huntley** (Dover Publications, Inc.).

Reordenando la igualdad (1), vemos que ϕ es un número con la curiosa propiedad que su inverso multiplicativo es *él mismo disminuído en 1*. Simbólicamente podemos escribir $(\phi - 1)\phi = 1$. Como un primer ejercicio, usted podría probar que ϕ es el único número real positivo con esa propiedad. Al plantear la misma ecuación en el anillo de los enteros módulo 5, designado como $\mathbb{Z}_5$, observamos que sólo hay una solución. ¿Cuál es ella?. ¿Podría usted decidir acerca de lo que sucede en $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}, \mathbb{Z}_{13}$?.

Como el cuadrado de ϕ y el cuadrado de $-\phi$ son iguales, obtenemos la igualdad $(-\phi)^2 = \phi + 1$ y en consecuencia $(-\phi)^2 + (-\phi) - 1 = 0$. Es decir, $-\phi$ es un cero del polinomio $x^2 + x - 1$. Siendo así, tenemos que cualquiera de los dos polinomios $x^2 - x - 1$ o $x^2 + x - 1$ sirven para definir nuestro número invitado ϕ .

Notemos que usando el símbolo destinado a las raíces cuadradas, $\sqrt{}$, obtenemos otra manera de representar este número, a saber: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Ya observó que $\phi > 1$?. Designando como ϕ' la segunda solución de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$, podemos escribir las igualdades $\phi + \phi' = 1$ y $\phi \cdot \phi' = -1$. Sin determinar el valor de ϕ' , podemos decir, con la ayuda de esta última igualdad, que $\phi' < 0$.

Antes de analizar otras propiedades de esos dos números, ϕ y ϕ' , formalicemos la siguiente

Proposición 1.0.1 *El número real* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, *llamado razón áurea y su conjugado* $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, *satisfacen la ecuación* $x^2 - x - 1 = 0$ *y en consecuencia las propiedades*

$$\boxed{\phi + \phi' = 1 \quad y \quad \phi\, \phi' = -1}$$

2 ϕ en la geometría

Veamos ahora, como se presenta nuestro amigo ϕ , vestido con ropaje geométrico. Usando la igualdad (1) tenemos que $\phi^2 = \phi + 1$ de donde podemos escribir

$$\frac{(\phi + 1)}{\phi} = \frac{\phi}{1} \tag{2.1}$$

Esto indica que si, en una recta, dibujamos la unidad a continuación de ϕ, obteniendo los puntos A, B y C, vale la proporción $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{CB}$ (ver Figura 1).

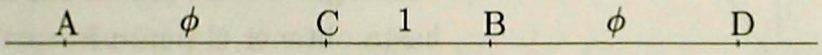

Figura 1.

Siendo así vemos que el punto C divide el trazo AB en la razón áurea.

Si a la igualdad $\phi^2 = \phi + 1$ le sumamos $\phi^2 + \phi$ en ambos miembros, obtenemos $2\phi^2 + \phi = \phi^2 + 2\phi + 1$. Reescribimos esta última igualdad como $(2\phi + 1)\phi = (\phi + 1)^2$ y de ahí que

$$\frac{2\phi + 1}{\phi + 1} = \frac{(\phi + 1)}{\phi} \tag{2.2}$$

Una posible interpretación geométrica de esa igualdad consiste en notar que si prolongamos el trazo AB hasta alcanzar el punto D, que dista ϕ de B, entonces $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{BD}$. Vea la figura Figura 1 anterior. De ese modo, usando la igualdad (2.1) obtenemos que el punto B también divide el trazo AD en la razón áurea . Otro modo de expresar la misma idea es decir que D *divide externamente* al trazo AB en la razón áurea. En este caso diremos, por analogía que C *divide internamente* el trazo AB en la razón áurea.

2.1 Construcción geométrica de ϕ

Como es tradicional, por *construcción geométrica* de un número α entenderemos el hecho de *dibujar* un trazo que mida exactamente α, usando sólo un trazo unitario (de longitud 1), una regla no graduada y un compás.

Suponemos que ya es conocido el procedimiento para construir:

a) Una recta paralela a otra dada y que pase por un punto dado

b) Una recta perpendicular a otra dada y que pase por un punto dado.

Conforme a la Figura 2, para construir $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, realicemos las siguientes etapas:

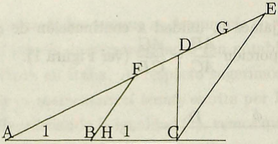

Figura 2.

1- Dibujar los trazos unitarios AB, BC y CD, siendo CD $\perp$ AC.

2- Prolongar el trazo AD en una unidad hasta obtener el punto E.

3- Dibujar el trazo BF paralelo al trazo CE. El punto F está en AD.

Ahora observemos que AF es la mitad de AE (porque B es el punto medio de AC). Además AD es $\sqrt{5}$ y DE mide 1, luego AF $=\phi$.

Ejercicio Determine algún procedimiento para dividir un trazo de longitud a en la razón áurea.

Ayuda: Imitando la construción anterior suponga que el trazo AC mide a. Prolonge AF en $\frac{a}{2}$ hasta el punto G y haga FH paralelo con GC.

2.2 La estrella de nuestra bandera

Sabemos que las puntas de la estrella de la bandera chilena coinciden con los vértices del polígono regular de cinco lados (*pentágono*). Conforme a la Figura 3, los puntos A,B,C,D y E están sobre una circunferencia.

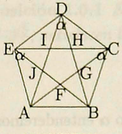

Figura 3.

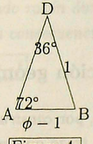

Figura 4.

Lema 2.2.1 *En cada punta de la estrella hay un ángulo de* 36°.

Demostración Designemos como α el ángulo subtendido por cada lado del pentágono y observemos donde ellos aparecen. Conforme a la Figura 3 y usando el lado AB vemos que son los ángulos designados como α. Análogamente se procede con los otros lados del pentágono. Ahora, como los ángulos interiores de cualquier triángulo plano suman 180 grados, usando el triángulo AED podemos escribir $\alpha + 3\alpha + \alpha = 180°$, de donde $\alpha = 36°$. ■

Proposición 2.2.2 *Las diagonales del pentágono regular se cortan en la razón áurea.*

Demostración Supongamos que el trazo ID (Figura 3) es unitario y que el trazo AI mide a. Notemos que el triángulo EDJ es isósceles, porque el ángulo en D mide 36° y el ángulo en E mide 72°, en consecuencia el tercer ángulo debe medir 180°-(36°+72°) = 72°. Luego a es la longitud del lado del pentágono. Como los triángulos BAD y HID tienen sus lados proporcionales, podemos escribir

$$\frac{AD}{AB} = \frac{ID}{IH}, \text{ es decir, } \frac{a+1}{a} = \frac{1}{a-1}.$$

Así tenemos que $a^2 - 1 = a$, o sea, a es el cero positivo del polinomio $x^2 - x - 1$. Por lo tanto se trata de nuestro conocido ϕ. Además es claro que

$$\frac{AI}{ID} = \frac{a}{1} = \phi$$

Lo análogo vale para las otras intersecciones. ■

Entonces IH = EH- EI = ϕ -1. La Figura 4 representa un triángulo como los correspondientes a cada punta de nuestra estrella, explicitando los valores 1 y ϕ .

Observe que la base de esa punta mide exactamente ϕ' . La altura h podemos calcularla mediante el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{1 - \left(\frac{\phi - 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3 + 2\phi - \phi^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\phi + 2}.$$

2.3 El rectángulo áureo

Decimos que un rectángulo es un *rectángulo áureo* si el lado menor es la división áurea del mayor.

La Figura 5, ilustra un procedimiento para construir el rectángulo áureo AFGD. Basta comenzar con un cuadradro de lado arbitrario AB= BC= CD= DA. Siendo

E el punto medio de AB, copiamos la longitud EC sobre el lado AB (a partir del punto E), obteniendo el vértice F. En F hacemos una perpendicular a AF que corta la prolongación de DC en el cuarto vértice G.

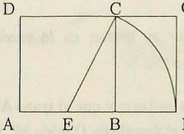

Figura 5.

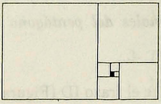

Figura 6.

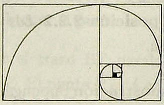

Figura 7.

Verifiquemos que esa construcción realmente produce un rectángulo áureo. Debemos verificar que AF:AB $= \phi$. Si AB= a, entonces EC $= \sqrt{\frac{a}{2}^2 + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, luego AF= EF+ AE $= \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2}$. Ahora ya podemos calcular esa razón

$$\text{AF:AB}= \left(\tfrac{a}{2}\sqrt{5} + \tfrac{a}{2}\right) : a = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2} = \phi. \qquad \blacksquare$$

Construyamos ahora una sucesión de cuadrados conectados entre ellos mediante rectángulos áureos. Partimos con un cuadrado arbitrario, como el ABCD de la Figura 5 de lado a. A continuación se forma el rectángulo áureo correspondiente obteniendo el trazo de longitud $a\phi$. Con él formamos un segundo cuadrado produciendo otro rectángulo áureo de lados $a\phi$ y $a(\phi + 1)$. Ahora construimos el tercer cuadrado (de lado $a(\phi + 1)$) y un tercer rectángulo áureo de lado mayor $a(2\phi + 1)$. El cuarto cuadrado es de lado $a(2\phi + 1)$ y el lado mayor del cuarto rectángulo áureo es $a(3\phi + 2)$. Sería interesante que usted escribiera los lados de algunos rectángulos áureos siguientes, porque ellos son un buen ejemplo de la sucesión que estudiaremos más adelante.

Geométricamente usted puede ver, en la Figura 6, los siete primeros rectángulos áureos para el pequeño cuadrado marcado en negro. Observe usted que en vez de calcular los lados mayores de cada rectángulo áureo en la forma *aditiva* descrita anteriormente, podríamos hacerlo usando el modo *multiplicativo*, puesto que cada lado del rectángulo áureo es ϕ veces el lado del cuadrado. Siendo a la longitud del lado del cuadrado inicial tenemos que los lados de sucesivos rectángulos áureos son $a\phi$, $a\phi^2$, $a\phi^3$, $a\phi^4$, ... Naturalmente esta construcción de rectángulos áureos es un proceso infinito. Tal como podemos crear rectángulos áureos infinitamente grandes a partir de cualquier cuadrado, tambien podemos revertir el proceso, multiplicando cada vez por el número $\frac{1}{\phi}$, observe que se trata del opuesto de ϕ'. De ese modo partimos de un cuadrado arbitrario hasta detenernos en un rectángulo áureo arbitrariamente pequeño. Si en la Figura 6 conservamos sólo los lados mayores de los rectángulos obtenemos una poligonal llamada espiral rectangular. Puede usted imaginar los arcos de circunferencia uniendo los vértices opuestos de los cuadrados que aparecen en esa sucesión y visualizará la llamada *espiral logarítmica* o *equiangular*. Una aproximación de esto es la Figura 7.

2.4 Ejemplos con Trigonometría

Volvamos a la Figura 4 de la sección 2.2. Aplicando el *Teorema del seno*, podemos escribir

$$\frac{1}{\text{sen}72^\circ} = \frac{\phi - 1}{\text{sen}36^\circ}$$

Usemos ahora la igualdad sen72°= 2sen36°cos36° para obtener la identidad $\cos 36^\circ = \frac{\phi}{2}$. Esto muestra que el número ϕ también puede aparecer en la trigonometría. En verdad hay otras muchas ocasiones trigonométricas en que aparece ϕ . Aproveche algunas clásicas identidades trigonométricas para expresar, en función de ϕ , los valores de sen 36°, tg36°, sen18° y cos18°. Por ejemplo :

$$\text{sen}36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - \phi^2}$$

Usando la igualdad (1.1), obtenemos $\text{sen}36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{4 - (\phi + 1)} = \sqrt{3 - \phi}$. Además, $\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\phi}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \phi}$, igualdad que puede obtenerse de inmediato, a partir de la Figura 4, mediante la razón $\frac{h}{\text{BD}}$.

Proposición 2.4.1 *Consideremos tres rayos coplanares que parten del punto P y una recta L, que los corta en los puntos A, B, C, y D. Si $\angle(APB) = \angle BPC = \angle CPD = \theta$, el trazo AB es unitario, BC= ϕ y CD= 2ϕ +1, entonces* $\theta = 18^\circ$.

Demostración Designemos como α el ángulo $\angle BAP$. Por simples consideraciones geométricas obtenemos

$$\angle BCP = 180^\circ - (\alpha + 2\theta) \text{ y } \angle CDP = 180^\circ - (\alpha + 3\theta).$$

Aplicando el *Teorema del seno* a los triángulos ABP, BCP, CDP y ADP (Figura 8), podemos escribir, respectivamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{AB}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{BP},\quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{BC}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+2\theta)}{BP},\quad \frac{\operatorname{sen}\theta}{DC}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+2\theta)}{DP},\quad \frac{\operatorname{sen}(3\theta)}{AD}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{DP}$$

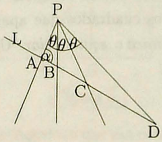

Figura 8.

Entonces:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{AB}\cdot\frac{\operatorname{sen}\theta}{DC}=\frac{\operatorname{sen}\theta}{BC}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3\theta)}{AD}.$$

Después de dividir esta igualdad por el número sen(θ), que no es cero, reemplazamos los trazos en la siguiente forma:

AB = 1, BC= ϕ , CD= $2\phi + 1 = \phi + \phi + 1 = \phi + \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^3$ y AD= $1 + \phi + \phi^3 = \phi^2 + \phi^3 = \phi^2(1 + \phi) = \phi^5$, obteniendo:

$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\phi^3} = \frac{\operatorname{sen}(3\theta)}{\phi^5}$, es decir $\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = \phi^2$.

Como $\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}(\theta)} = 4\cos^2\theta - 1$, podemos escribir $4\cos^2\theta = 1 + \phi^2 = 2 + \phi$. Es decir $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2+\phi}$. Ahora es claro que $\theta = 18°$.

■

Terminamos esta presentación geométrica de ϕ , viendo una notable fórmula que relaciona números de distinto origen que nacieron al uso matemático con siglos de distancia y que sin embargo están estrechamente ligados mediante una sencilla igualdad. Se trata de las cuatro constantes i unidad imaginaria, e, π y ϕ.

Puesto que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$, podemos hacer $\alpha = \pi$. Así el segundo miembro queda -1. Además $-1 = \phi\cdot\phi' = (1-\phi)\phi$, y escribimos la igualdad prometida:

$$\boxed{e^{i\pi} = (1-\phi)\phi}$$

3 ϕ en las sucesiones

Antes de estudiar el modo como aparece ϕ entre las sucesiones, tal vez sea conveniente recordar que cualquier función cuyo **dominio** esté contenido en el conjunto de los número naturales, es llamada *sucesión*. Notemos que es innecesario especificar el conjunto que contiene las imágenes, sin embargo también supondremos que son números reales. Entonces cualquier sucesión asume la forma $\{(n, u) : n \in A, u \in B\}$, donde $A \subset \mathbb{N}$ y $B \subset \mathbb{R}$ y u es único para cada n. Como es habitual, usaremos la notación u_n para indicar el par (n, u) en la sucesión. Es frecuente decir, con abuso de lenguaje, que $\{u_n\}$ es la sucesión, dando por conocidos y fijos, su dominio, recorrido y la *forma* de obtener u para cada n. También usaremos esa notación. Suponiendo que $A = \mathbb{N}$ y aceptando el *orden* de aparición de los naturales, a partir del 1, basta especificar ordenadamente las imágenes, para conocer la sucesión. Por tal razón las describimos indicando su recorrido aunque sea parcialmente; pero asumiéndolo ordenado. Las imágenes son denominadas *términos* de la sucesión. Por ejemplo, cualquiera de las siguientes escrituras, representa la misma sucesión:

a) $u_n = n + \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

b) $\{(n, n + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

c) $Id + \frac{1}{Id}$ siendo Id la función identidad en $\mathbb{N}$.

d) $\{1 + \frac{1}{1}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 4 + \frac{1}{4}, 5 + \frac{1}{5}, \cdots\}$.

e) $\{2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{4}, \frac{26}{5}, \cdots\}$

f) $\{\frac{n^2+1}{n}\}_n$.

Es frecuente encontrar sucesiones en que cada término es definido usando algunos anteriores. En ese caso hablamos de *sucesiones recurrentes* y se necesita conocer los primeros para calcular los siguientes. Por ejemplo la *relación de recurrencia* $u_{n+1} = 1 + u_n$ define la sucesión cuyos términos son

$$u_1, 1 + u_1, 2 + u_1, 3 + u_1, \cdots$$

Es claro que esta sucesión queda totalmente determinada una vez que se conozca el valor del primer término.

Ejercicio Calcule el valor que debe tomar u_1 para que $u_{10} + u_{11} = 39$ en la sucesión anterior.

En la sección anterior ya entramos en contacto con una sucesión recurrente, aunque no lo destacamos en esa oportunidad. Revisemos el modo de construir los rectángulos áureos y designemos como u_i el lado del i-ésimo cuadrado. Así obtenemos la sucesión

$$a, \quad a\phi, \quad a(\phi+1), \quad a(2\phi+1), \quad a(3\phi+2), \quad \cdots$$

Esta sucesión satisface la relación de recurrencia

$$\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n} \tag{*}$$

Si formamos un nueva sucesión, poniendo un 1 en cada lugar donde aparezcan los números ϕ o a, obtenemos la sucesión

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad \cdots \tag{3.1}$$

que obviamente también tiene la propiedad expresada en (*). La sucesión (3.1) es conocida como **Sucesión de Fibonacci** porque aparece en el libro *Liber Abacci* del célebre autor italiano *Leonardo de Pisa* a quien apodaban "Fibonacci" (Hijo de Bonacci). Esa voluminosa obra data de 1202 y contiene numerosos ejemplos. Uno de ellos genera la sucesión (3.1) y está planteado más o menos en la siguiente forma:

> Alguien coloca un par de conejos en cierto lugar cercado por todos lados. Determinar cuántos pares de conejos nacerán en un año. Se asume que todos los meses cada par de conejos produce otro par y que comienzan a parir dos meses después de su propio nacimiento.

Nosotros supondremos ciertas otras condiciones adicionales, como: *la primera pareja de conejos es recién nacida, no hay mortalidad en esa población, las parejas no son disparejas, ...* y usaremos la siguiente tabla que se llena por columnas completas, es decir de izquierda a derecha.

Mes:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nacidos:	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Menores:	0	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Adultos:	0	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Total:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	54	89	144

Si usted observa con atención, la primera y cuarta filas satisfacen la propiedad (*). Las otras dos filas la satisfacen desde la segunda columna. Además la cuarta fila es exactamente la sucesión de Fibonacci y sus términos son conocidos como *números de Fibonacci*. Es claro que modificando los dos primeros términos y usando la relación de recurrencia (*), obtenemos nuevas sucesiones que llamamos también de Fibonacci. Cuando sea necesario distinguirlas usaremos la notación $F_{(a,b)}$, para indicar que $u_1 = a, u_2 = b$ y $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. ¿Qué interpretación puede darle usted a la sucesión $F_{(1,\phi)}$?.

3.1 Algunas propiedades de los números de Fibonacci

Observemos los términos de la nueva sucesión formada por los cuocientes $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ de la sucesión $F_{(1,1)}$.

$$1,\ 2,\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89},\ \ldots$$

Al parecer estos términos están cerca del 1,6.

Si existiera el límite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en la sucesión $F_{(1,1)}$ y lo designamos como L, a partir de la igualdad $\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$, podemos escribir $L = 1 + \dfrac{1}{L}$. Es decir, L satisface la ecuación $X^2 - X - 1 = 0$, y ¡Sorpresa!, estamos nuevamente ante nuestro amigo ϕ y su hermano ϕ' . Así tenemos la

Proposición 3.1.1 *El cuociente $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ de dos términos consecutivos de $F_{(1,1)}$ se aproxima, tanto como queramos, al número ϕ .*

Demostración Ya vimos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ es ϕ o bien ϕ' . Pero para todo n los términos consecutivos son de igual signo, luego el cuociente es positivo aunque n sea grande. En consecuencia el límite no puede ser un número negativo, como lo es ϕ'. ∎

3.2 La serie de Fibonacci

Como es tradicional, cada vez que estudiamos una sucesión es irresistible hablar de la serie asociada (suma *ordenada* de los términos de la sucesión) o de otras sucesiones definidas en base a la sucesión conocida. En estos primeros cálculos bastará recordar algunas propiedades de las sumatorias.

Proposición 3.2.1 *Sea $\{u_i\}$ la sucesión $F_{(a,b)}$. Entonces la suma de sus primeros n términos es $u_{n+2} - b$.*

Demostración Queremos probar que $s_n = u_1 + \cdots u_n = \sum_1^n u_i = u_{n+2} - b$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Como $u_i = u_{i+2} - u_{i+1}$, entonces $\sum_1^n u_i = \sum_1^n u_{i+2} - \sum_1^n u_{i+1}$, es decir:

$$\sum_1^n u_i = (u_3 + \cdots + u_{n+2}) - (u_2 + \cdots + u_{n+1}) = u_{n+2} - u_2 = u_{n+2} - b$$ ∎

En particular, obtenemos que

Corolario 3.2.2 *La suma de los primeros n términos $F_{1,1}$ es $u_{n+2} - 1$*

Ejercicio 3.2.3 *Interprete geométricamente y calcule lo indicado en la Proposición anterior, referida a la sucesión de Fibonacci $F_{1,\phi}$*

Proposición 3.2.4 *La suma de los n primeros números de la sucesión $F_{(a,b)}$ con índice impar es $u_{2n} + a - b$.*

Demostración Usando la igualdad $u_{2i-1} = u_{2i} - u_{2i-2}$, válida para todo $i > 1$, tenemos que la suma buscada es

$$\begin{aligned} u_1 + \sum_2^n u_{2i-1} &= u_1 + \sum_2^n u_{2i} - \sum_2^n u_{2i-2} = \\ &= u_1 + (u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n}) - (u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n-2}) = \\ &= u_{2n} + u_1 - u_2 = u_{2n} + a - b \end{aligned}$$ ∎

Ahora es inmediato el siguiente

Corolario 3.2.5 *La suma de los n primeros términos con subíndice impar en $F_{1,1}$ es u_{2n}.*

Ejercicio 3.2.6 *Calcule la suma de los n primeros términos con subíndice par en $F_{(a,b)}$ y en $F_{1,1}$.* *(Resp.: $u_{2n+1} - a$, $u_{2n+1} - 1$)*

De acuerdo a la Proposición (3.5) y al Ejercicio (3.7) tenemos que

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} + a - b \quad \text{y} \quad u_2 + u_4 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - a$$

Luego, restando ambas igualdades obtenemos

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 2a - b$$

Sumando a ambos lados el término u_{2n+1}, podemos escribir:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 2a - b$$

Es decir, para un n arbitrario, tenemos que :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 2a - b$$

Usando *Inducción Matemática*, podemos intentar nuevas demostraciones para esta última identidad, y otras. Recordemos, primero que este método es usado para demostrar que una cierta proposición $\mathcal{P}$ es válida para todo número natural. Su esencia es la siguiente:

(a) Verificar que $\mathcal{P}$ es válida para el primer valor. Generalmente ese valor es el 1. Esta etapa puede ser llamada *Base de la Inducción*.

(b) Aceptada la veracidad de $\mathcal{P}$ para un número natural arbitrario, debe demostrarse la veracidad de $\mathcal{P}$ para el sucesor de tal número natural. Esta segunda parte del proceso es conocida como la *transición inductiva*.

Para fijar las ideas de la inducción matemática, veamos el siguiente

Ejemplo 3.2.7 *Probar que en toda sucesión de Fibonacci $F_{(a,b)}$, con $b = a$ o $b = a\phi$ o $b = a\phi'$, vale $u_{n+m+1} = \dfrac{u_n u_m}{a} + \dfrac{u_{n+1} u_{m+1}}{b}$*

Demostración Usaremos la inducción en el número natural m, para probar que vale la propiedad $\mathcal{P}$: $\quad u_{n+m+1} = \dfrac{u_n u_m}{a} + \dfrac{u_{n+1} u_{m+1}}{b}$.

(a) *Base de la Inducción*: Si $m = 1$, tenemos que $u_{n+m+1} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
Además: $\dfrac{u_n u_m}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_{m+1}}{b} = \dfrac{u_n u_1}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_2}{b} = \dfrac{u_n a}{a} + \dfrac{u_{n+1}b}{b} = u_n + u_{n+1}$
Para $m = 2$, tenemos $u_{n+m+1} = u_{n+3}$ y:
i) Si $a = b$, entonces $u_1 = u_2 = a, u_3 = 2a$ y $\dfrac{u_n u_m}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_{m+1}}{b} = \dfrac{u_n u_2}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_3}{a} = u_n + 2u_{n+1} = (u_n + u_{n+1}) + u_{n+1}$
ii) Si $b = a\phi$, entonces $u_i = a\phi^{i-1}$ y tenemos que $\dfrac{u_n u_m}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_{m+1}}{b} = \dfrac{a\phi^{n-1}\cdot a\phi}{a} + \dfrac{a\phi^n \cdot a\phi^2}{a\phi} = a\phi^n + a\phi^{n+1} = a\phi^{n+2}$
iii) El caso $b = a\phi'$, es similar. En consecuencia vale $\mathcal{P}$ para los dos primeros valores de m.

(b) *Transición Inductiva*: Aceptamos que vale $\mathcal{P}$ para $m = 1, \cdots, k$, entonces en particular, tenemos que
para $m = k - 1$ vale $u_{n+k} = \dfrac{u_n u_{k-1}}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_k}{b}$
y para $m = k$ vale $u_{n+k+1} = \dfrac{u_n u_k}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_{k+1}}{b}$
Sumando, tenemos: $u_{n+k+2} = \dfrac{u_n u_{k+1}}{a} + \dfrac{u_{n+1}u_{k+2}}{b}$
Es decir vale $\mathcal{P}$ para $m = k + 1$. ∎

Corolario 3.2.8 *En $F_{(1,1)}$ valen las siguientes igualdades:*

(a) $u_{n+m+1} = u_n u_m + u_{n+1}u_{m+1} \quad \forall n, m \geq 1,$

(b) $u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \quad \forall n \geq 2,$

(c) $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 \quad \forall n \geq 2,$

(d) $u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + u_n^2 \quad \forall n \geq 1,$

(e) $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3 \quad \forall n \geq 2.$

Demostración

(a) Basta hacer $a = b = 1$ en la proposición anterior.

(b) Hacer $n = m+1$ en (a). Note que esta parte implica que u_n es un divisor de u_{2n}.

(c) Sustituir $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ en (b).

(d) Reemplazar m por n en (a).

(e) Poniendo $m + 1 = 2n$ en (a), usar los dos resultados anteriores. ∎

Proposición 3.2.9 $u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (a^2 + ab - b^2)(-1)^n$ *en* $F_{(a,b)}$.

Demostración Haremos inducción en la variable n para la propiedad $\mathcal{P}: \quad u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (a^2 + ab - b^2)(-1)^n$

Base de la Inducción: Cuando $n = 1$ tenemos que el primer miembro de $\mathcal{P}$ es $u_{n+1}^2 = u_2^2 = b^2$. Al calcular el segundo miembro obtenemos:
$u_n u_{n+2} + (a^2+ab-b^2)(-1)^n = u_1 u_3 + (a^2+ab-b^2)(-1)^1 = a(a+b) - (a^2+ab-b^2) = b^2$.
Luego vale $\mathcal{P}$.

Transición Inductiva: Aceptamos que vale $\mathcal{P}$ para $n = 1, \cdots, k$. Entonces para $n = k$ vale la igualdad
$u_{k+1}^2 = u_k u_{k+2} + (a^2 + ab - b^2)(-1)^k$. Sumando en ambos miembros el número $u_{k+1}u_{k+2}$, obtenemos:
$u_{k+1}(u_{k+1} + u_{k+2}) = u_{k+2}(u_k + u_{k+1}) + (a^2 + ab - b^2)(-1)^k$. De donde
$u_{k+1}u_{k+3} = u_{k+2}u_{k+2} + (a^2 + ab - b^2)(-1)^k$, es decir

$$u_{k+2}^2 = u_{k+1}u_{k+3} + (a^2 + ab - b^2)(-1)^{k+1}.$$

Luego hemos visto que vale $\mathcal{P}$ para $n = k + 1$. ∎

Ejercicio 3.2.10 *Demuestre las siguientes propiedades de los números de Fibonacci en* $F_{(1,1)}$.

(a) $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$,

(b) $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$,

(c) $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \cdots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$.

Terminemos esta sección dejando constancia de ciertas propiedades de los números $F_{(1,1)}$ respecto a los números combinatorios. Estos últimos, también llamados coeficientes binomiales, se reordenan en el conocido *Triángulo de Pascal*. Ellos aparecen al desarrollar las potencias (de exponente entero no negativo) del binomio $a + b$ y corresponden a los coeficientes de los términos literales de la forma $a^{n-i}b^i$ con $i = 0, 1, \cdots, n$. Recordando que:

$$
\begin{array}{lllllll}
(a+b)^0 = & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 = & 1a+ & 1b & & & & \\
(a+b)^2 = & 1a^2+ & 2ab+ & 1b^2 & & & \\
(a+b)^3 = & 1a^3+ & 3a^2b+ & 3ab^2+ & 1b^3 & & \\
(a+b)^4 = & 1a^4+ & 4a^3b+ & 6a^2b^2+ & 4ab^3+ & 1b^4 & \\
(a+b)^5 = & 1a^5+ & 5a^4b+ & 10a^3b^2+ & 10a^2b^3+ & 5ab^4+ & 1b^5 \\
\vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

obtenemos el Triángulo de Pascal :

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\quad \text{o bien :} \quad
\begin{array}{cccccc}
C_0^0 & & & & & \\
C_0^1 & C_1^1 & & & & \\
C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & & & \\
C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & \\
C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & \\
C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Hemos utilizado el símbolo C_{j-1}^{i-1} para indicar el número que aparece en la fila i y columna j del triángulo de Pascal. Observe que el número en posición (i,j) se obtiene sumando los que están en la fila anterior, exactamente sobre él y su anterior. Es decir, simbólicamente deberíamos escribir: $C_l^k = C_l^{k-1} + C_{l-1}^{k-1}$. Esta fórmula es fácilmente demostrable si recordamos que :

$$C_n^m = \tfrac{m!}{n!(m-n)!}, \quad p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (p-1) \cdot p \quad \text{y} \quad 0! = 1$$

Consideremos los trazos que forman un ángulo de 45° sobre la horizontal y que pasan por un 1 en la primera columna. Si ese 1 está en la fila i, diremos que se trata de la i-ésima diagonal. Tenemos ahora otra *¡Sorpresa !*: La suma de los números en la i-ésima diagonal es exactamente el número u_i de la sucesión $F_{(1,1)}$. Para convencernos que eso siempre es válido, debemos probar la siguiente

Proposición 3.2.11 *La suma de todos los números ubicados en dos diagonales sucesivas del triángulo de Pascal, es igual a la suma de los números ubicados en la diagonal siguiente.*

Demostración Si D_k representa la k-ésima diagonal en el triángulo de Pascal, y $S(D_k)$ la suma de sus números, sabemos que :

$$S(D_k) = C_0^{k-1} + \quad C_1^{k-2} + \quad C_2^{k-3} + \quad C_3^{k-4} + \quad \cdots$$

$$S(D_{k+1}) = C_0^{k} + \quad C_1^{k-1} + \quad C_2^{k-2} + \quad C_3^{k-3} + \quad \cdots$$

Sumado tenemos que:

$$S(D_k) + S(D_{k+1}) = C_0^k + (C_0^{k-1} + C_1^{k-1}) + (C_1^{k-2} + C_2^{k-2}) + (C_2^{k-3} + C_3^{k-3}) + \cdots$$

Ya sabemos que para cualquier l, i vale las igualdad $C_i^l + C_{i+1}^l = C_{i+1}^{l+1}$, luego

$$S(D_k) + S(D_{k+1}) = 1 + C_1^k + \quad C_2^{k-1} + \quad C_3^{k-2} + \quad \cdots = S(D_{k+2})$$

■

3.3 Espacio de las $F_{(a,b)}$

Sean $F_{(a,b)}$ y $F_{(c,d)}$ dos sucesiones de Fibonacci. Siendo ellas funciones con recorrido en $\mathbb{R}$, podemos definir su *suma* mediante la suma de sus imágenes, es decir

$$(F_{(a,b)} + F_{(c,d)})(n) = F_{(a,b)}(n) + F_{(c,d)}(n).$$

Usamos el producto en $\mathbb{R}$ para definir también la *ponderación* de una sucesión de Fibonacci por un número real, o sea:

$$[\alpha F_{(a,b)}](n) = \alpha \cdot F_{(a,b)}(n)$$

Proposición 3.3.1 *El conjunto $S(F)$, de las sucesiones de Fibonacci, con la adición y ponderación real anteriores es un espacio vectorial real.*

Demostración Como el conjunto de todas las sucesiones reales ya es un espacio vectorial real, con las "mismas" definiciones de suma y ponderación, basta probar que $S(F)$ es un subespacio vectorial.

Ya sabemos que $S(F)$ es un subconjunto no vacío, luego sólo falta verificar que es cerrado para las combinaciones lineales. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $F_{(a,b)}, F_{(c,d)} \in S(F)$. La sucesión $F = \alpha F_{(a,b)} + F_{(c,d)} \in S(F)$ porque :

$$\begin{aligned}
F(n) &= [\alpha F_{(a,b)} + F_{(c,d)}](n) = \alpha F_{(a,b)}(n) + F_{(c,d)}(n)\\
&= \alpha[F_{(a,b)}(n-1) + F_{(a,b)}(n-2)] + [F_{(c,d)}(n-1) + F_{(c,d)}(n-2)]\\
&= [\alpha \cdot F_{(a,b)}(n-1) + F_{(c,d)}(n-1)] + [\alpha \cdot F_{(a,b)}(n-2) + F_{(c,d)}(n-2)]\\
&= [\alpha F_{(a,b)} + F_{(c,d)}](n-1) + [\alpha F_{(a,b)} + F_{(c,d)}](n-2) = F(n-1) + F(n-2)
\end{aligned}$$

Es decir F satisface la propiedad (*), que define las sucesiones de Fibonacci. ■

Además es fácil verificar la esperada igualdad $F_{(a,b)} + F_{(c,d)} = F_{(a+c,b+d)}$.

Si designamos los términos de $F_{(a,b)}$ como u_i, es decir:

$$\{u_i\} = \{a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b, \quad 3a+5b, \quad 5a+8b, \quad 8a+13b, \quad \cdots\}$$

separamos la sucesión a_i de los coeficientes de a y la suceción b_i de los coeficientes de b y escribimos respectivamente:

$$\{a_i\} = \{1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad \cdots\} \text{ y}$$

$$\{b_i\} = \{0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad \cdots\}$$

Lo anterior nos permite conjeturar la fórmula $u_n = a_n a + b_n b$. Queda como ejercicio que usted la demuestre usando inducción matemática. Observe además que la sucesión a_i es nada más que $F_{(1,0)}$ y que b_i es $F_{(0,1)}$. Resumimos todo esto en la siguiente

Proposición 3.3.2 *El espacio $S(F)$ acepta como base al conjunto $\{F_{(1,0)}, F_{(0,1)}\}$ y en consecuencia tiene dimensión 2.*

Demostración Como cualquier $F_{(a,b)}$ puede escribirse en la forma

$$F_{(a,b)} = aF_{(1,0)} + bF_{(0,1)}$$

y la igualdad $aF_{(1,0)} + bF_{(0,1)} = 0$ implica $a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$ y $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$, entonces el conjunto $\{F_{(1,0)}, \quad F_{(0,1)}\}$ es linealmente independiente. ■

Como sabemos, los espacios vectoriales reales no tienen base única. En consecuencia buscaremos alguna otra base de $S(F)$ que nos permita expresar sus elementos sin necesidad de usar la recurrencia. Es decir buscamos un modo de escribir u_n a través de una relación directa con n.

Ejercicio 3.3.3 *Las sucesiones $F_{(1,\phi)}$ y $F_{(1,\phi')}$ son progresiones geométricas, de razones ϕ y ϕ' respectivamente. Es decir:*

$$F_{(1,\phi)} = \{1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \cdots\} \quad y \quad F_{(1,\phi')} = \{1, \phi', \phi'^2, \phi'^3, \phi'^4, \cdots\}$$

Notemos ahora que $\{F_{(1,\phi)}, F_{(1,\phi')}\}$ es linealmente independiente, porque $aF_{(1,\phi)} + bF_{(1,\phi')} = 0$ implica que $a \cdot 1 + b \cdot 1 = 0$ y $a\phi + b\phi' = 0$.

Como $\phi - \phi' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \neq 0$, el sistema $\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{a}+\mathrm{b} & = & 0 \\ \mathrm{a}\phi + \mathrm{b}\phi' & = & 0 \end{array}\right|$ acepta sólo la solución nula. Entonces $\{F_{(1,\phi)}, F_{(1,\phi')}\}$ es base de $S(F)$. Ya podemos probar la siguiente

Proposición 3.3.4 *(Fórmula de Binet). Sea u_n un término de $F_{(1,1)}$. Entonces*

$$u_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

Demostración Dado que $\{F_{(1,\phi)}, F_{(1,\phi')}\}$ es base de $S(F)$, existen únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $F_{(1,1)} = \alpha F_{(1,\phi)} + \beta F_{(1,\phi')}$. Aplicando esta igualdad de funciones a los elementos $1, 2 \in \mathbb{N}$, obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha + \beta \\ 1 & = & \alpha\,\phi + \beta\,\phi' \end{array}\right|$$

de donde $\alpha = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ y $\beta = -\frac{\phi'}{\sqrt{5}}$

En consecuencia $F_{(1,1)} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}F_{(1,\phi)} - \frac{\phi'}{\sqrt{5}}F_{(1,\phi')}$ que equivale a decir

$$u_n = \frac{\phi}{\sqrt{5}}\phi^{n-1} - \frac{\phi'}{\sqrt{5}}\phi'^{n-1} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

■

El siguiente ejemplo, exhibe una aplicación de la fórmula de Binet:

Ejemplo 3.3.5 *Calculemos $u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$, siendo u_i términos de $F_{(1,1)}$.*

Desarrollo Sea $S = u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n} = \sum_{i=1}^{n} u_{3i}$. Usando la Proposición anterior, podemos escribir $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi^{3i} - \phi'^{3i}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\sum_{i=1}^{n} \phi^{3i} - \sum_{i=1}^{n} \phi'^{3i}]$. $(\star)$

Notemos que al multiplicar la igualdad $P = \sum_{i=1}^{n} \phi^{3i} = \phi^3 + \phi^6 + \cdots + \phi^{3n}$, por el número ϕ^3, obtenemos $P\phi^3 = \phi^6 + \phi^9 + \cdots + \phi^{3n+3}$.
Después de restar ambas igualdades conseguimos $P = \frac{\phi^{3n+3} - \phi^3}{\phi^3 - 1}$, y ya que $\phi^3 - 1 = \phi^2\phi - 1 = (1+\phi)\phi - 1 = \phi + \phi^2 - 1 = \phi + (1+\phi) - 1 = 2\phi$, resulta $P = \frac{\phi^{3n+2} - \phi^2}{2}$.
Análogamente $\sum_{i=1}^{n} \phi'^{3i} = \frac{\phi'^{3n+2} - \phi'^2}{2}$ y reemplazando en $(\star)$, obtenemos
$S = \frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{\phi^{3n+2} - \phi^2}{2} - \frac{\phi'^{3n+2} - \phi'^2}{2}] = \frac{1}{2}[\frac{\phi^{3n+2} - \phi'^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^2 - \phi'^2}{\sqrt{5}}] = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$ ■

Observe que para calcular $S = u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$, no es necesario utilizar la fórmula de Binet. De hecho basta convencerse de la igualdad:
$S = (u_1 + u_2) + (u_4 + u_5) + (u_7 + u_8) + \cdots + (u_{3n-2} + u_{3n-1})$. Ahora sumamos a ambos lados el valor S y obtenemos
$2S = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{3n-2} + u_{3n-1} + u_{3n}$. Por Corolario 3.2.2 sabemos que el segundo miembro es $u_{3n+2} - 1$.

Ejercicio 3.3.6 *Expresar los términos U_n de $F_{(a,b)}$ usando los términos u_i de $F_{(1,1)}$.*
(Resp.: $U_n = au_{n-2} + bu_{n-1}$)

3.4 Divisibilidad en $F_{(1,1)}$

En esta sección utilizaremos varios hechos provenientes de la teoría elemental de los números. Vale la pena hacer un alto y recordarlos. Se trata del *Algoritmo de Euclides* y de algunas de sus consecuencias.

En el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ vale el *algoritmo de la división* (algoritmo de Euclides). El establece que

Dados dos números enteros arbitrarios a y b con $b \neq 0$, siempre existe un único par de enteros q llamado *cuociente*, y r llamado *resto* con las siguientes propiedades:

$$\text{(a) } a = bq + r \qquad \text{y} \qquad \text{(b) } 0 \leq r < |b|.$$

Podemos suponer que $a > b$. En caso contrario $q = 0$ y $r = a$.

Decimos que b es un divisor de a, o que a es divisible por b, si el resto obtenido con el algoritmo de la división entre a y b es cero. Lo escribiremos como $b|a$ para leerlo b divide a a.

Si al dividir a por b se obtiene un resto $r_1 \neq 0$, podemos aplicar el mismo algoritmo a los números b y r_1, obteniendo un resto r_2 y así continuar mientras los restos obtenidos no sean cero. Como la sucesión de restos es estrictamente decreciente y está acotada por 0 y b, necesariamente se trata de un proceso finito. Veamos el esquema de esas divisiones sucesivas, suponiendo que termina en el paso $n+1$.

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1 \\
b &= r_1 q_1 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= r_n q_n
\end{aligned}$$

Mirando la última fila, observamos que r_n **es un divisor de** r_{n-1}. Sustituyendo ese valor de r_{n-1} en la penúltima igualdad obtenemos $r_{n-2} = r_n q_n q_{n-1} + r_n = (q_n q_{n-1} + 1) r_n$, Es decir r_n **es un divisor de** r_{n-2}. Continuando de ese modo (¡Inducción!) podemos establecer que r_n **es un divisor de** b **y** a.

Proposición 3.4.1 *De acuerdo a las notaciones anteriores r_n es el mayor divisor común entre a y b, simbolizado como (a, b).*

Demostración Para demostrar esta afirmación, basta mostrar que cualquier divisor común a a y b es también un divisor de r_n. De la primera ecuación observamos que un tal d debe ser divisor de r_1. Ahora usamos la segunda ecuación y como d es divisor de b y r_1, también lo es de r_2. De ese modo podemos concluir (¡Inducción!) que es un divisor de r_n al usar la penúltima igualdad. ∎

Ejemplo 3.4.2 *Calculemos (u_{15}, u_9) cuando u_i es un término de $F_{(1,1)}$.*

Ya que $(u_{15}, u_9) = (610, 34)$, aplicamos el algoritmo de Euclides al par $a = 610$ y $b = 34$.

$$\begin{aligned} 610 &= 34 \cdot 17 + 32 \\ 34 &= 32 \cdot 1 + 2 \\ 32 &= 2 \cdot 16 + 0 \end{aligned}$$

Es decir $(u_{15}, u_9) = 2 = u_3$. La siguiente Proposición contiene varios hechos útiles acerca del máximo divisor común de dos números. La demostración queda como ejercicio.

Proposición 3.4.3 *Las siguientes afirmaciones son válidas para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$*

a) $(a, b) | (a, bc)$

b) $(ac, bc) = (a, b)c$

c) *Si* $(a, c) = 1$ *entonces* $(a, bc) = (a, b)$

d) $b|a$ *si y sólo si* $(a, b) = b$

e) *Si* $b|c$ *entonces* $(a, b) = (a + c, b)$

Proposición 3.4.4 *Si n es divisible por m entonces u_n es divisible por u_m, cuando u_i es un término de $F_{(1,1)}$.*

Demostración Debemos verificar que u_{mp} es divisible por u_m para cualquier $p \in \mathbb{N}$, ya que los índices considerados son positivos. Haremos inducción en p.

Base de la Inducción Cuando $p = 1$ tenemos que $n = m$ y en tal caso obviamente u_n es divisible por u_m.

Transición Inductiva: Aceptemos que u_{mk} es divisible por u_m. Debemos probar que $u_{m(k+1)}$ es divisible por u_m.

Por la parte (a) del Corolario 3.2.8, podemos escribir: $u_{m(k+1)} = u_{mk+m} = u_{mk+(m-1)+1}$
$= u_{mk}u_{m-1} + u_{mk+1}u_m$. Pero u_{mk} y u_m son divisibles por u_m, luego lo es $u_{mk}u_{m-1} + u_{mk+1}u_m$ y en consecuencia también $u_{m(k+1)}$ es divisible por u_m. ∎

Proposición 3.4.5 *En $F_{(1,1)}$, si $n \neq 4$ es un número compuesto, entonces el término u_n es un número compuesto.*

Demostración En la descomposición de $n = pq$, sabemos que al menos uno de los factores es distinto de 2. Supongamos que es p entonces podemos escribir $2 < p < n$. Además de escribir $1 \neq u_p < u_n$, sabemos, por el teorema anterior, que $u_p | u_n$.Luego u_n es compuesto. ∎

Proposición 3.4.6 *Cualquier par de términos consecutivos en $F_{(1,1)}$, son primos relativos.*

Demostración Supongamos, en contra de lo indicado, que existen dos términos consecutivos, digamos u_n y u_{n+1} tales que $(u_n, u_{n+1}) = d \neq 1$. Como $u_{n-1} = u_n + u_{n+1}$ y d divide el segundo miembro, tenemos que u_{n-1} es divisible por d. De ese modo obtenemos que d es un divisor de $u_2 = 1$. En consecuencia la única opción es $d = 1$. Esta es una contradicción. Luego $d = 1$. ∎

Lema 3.4.7 *Para cualquier par de naturales $m > n$ de cuociente q y resto r se tiene que $(u_m, u_n) = (u_r, u_n)$, en $F_{(1,1)}$.*

Demostración Siendo $m = nq + r$, escribimos $u_m = u_{nq+r}$. Usando el Corolario 3.2.8, parte (a) obtenemos: $u_m = u_{nq+r} = u_{nq+(r-1)+1} = u_{nq}u_{r-1} + u_{nq+1}u_r$.

Como n es un divisor de nq, por Proposición 3.4.4 sabemos que u_{nq} es divisible por u_n. Ahora usamos la Proposición 3.4.3 (e) para escribir:

$$(u_m, u_n) = (u_{nq}u_{r-1} + u_{nq+1}u_r, u_n) = (u_{nq+1}u_r, u_n).$$

Dado que u_n es un divisor de u_{nq} y este último es primo relativo con u_{nq+1} (por Proposición 3.4.6), tenemos que u_n es primo relativo con u_{nq+1}. Apliquemos ahora, la Proposición 3.4.3 (c) para obtener $(u_m, u_n) = (u_r, u_n)$. ∎

Proposición 3.4.8 *En $F_{(1,1)}$ vale $(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$*

Demostración Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m > n$. Aplicando el algoritmo de Euclides hasta obtener el último resto no nulo que designamos como r_t y que coincide con (m,n), según Proposición 3.4.1. El esquema correspondiente es :

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 \\ n &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{t-2} &= r_{t-1}q_{t-1} + r_t \\ r_{t-1} &= r_tq_t \end{aligned}$$

Usando el Lema anterior, aplicado a cada una de esas igualdades, excepto la última, deducimos que: $(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n) = (u_{r_1}, u_{r_2}) = \cdots = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$.

Como r_t es un divisor de r_{t-1}, también tenemos que u_{r_t} es un divisor de $u_{r_{t-1}}$. Es decir $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$. Como $r_t = (m,n)$ se tiene el resultado esperado $(u_n, u_m) = u_{(n,m)}$ ∎

4 ϕ en las fracciones continuadas

4.1 Propiedades

Si $\{u_i\}$ y $\{v_i\}$ son dos sucesiones arbitrarias de números reales, se define la *fracción continua* o *fracción continuada* $f(u_i, v_i)$ como la expresión

$$u_1 + \cfrac{v_1}{u_2 + \cfrac{v_2}{u_3 + \cfrac{v_3}{u_4 + \cdots}}}$$

Cuando $v_i = 1 \quad \forall i$, y todos los u_i sean enteros positivos, excepto u_1 que eventualmente podía ser cero, diremos que se trata de una *fracción continuada simple*. Como sólo trabajaremos fracciones continuadas simples, usaremos la expresión **fracción continuada** para referirnos a ellas. De ese modo escribiremos $f(a_i) = [a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots]$ para indicar la fracción continuada

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}.$$

Si $f(a_i)$ no tiene un último término, diremos que se trata de una **fracción continuada infinita**. Cada fracción continuada nos permite definir los números racionales de la forma $\alpha_k := [a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots a_k]$ llamados *convergentes* de $f(a_i)$. En particular aceptaremos que la primera convergente es $[a_1] = a_1$. Su segunda convergente es $[a_1; a_2] = \dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}$ y la tercera es $\dfrac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_2 a_3 + 1}$. Antes de continuar calculando las convergentes de una fracción continuada arbitraria, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1.1 *Determinemos el límite de las convergentes de la fracción continuada* $[1; 1, 1, \cdots]$

Como

$$f(1) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}.$$

podemos calcular directamente sus convergentes, concluyendo que ellas forman la sucesión

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots$$

Estas convergentes corresponden a los cuociente de la forma $\dfrac{u_{i+1}}{u_i}$ donde u_i es el i-ésimo término de $F_{(1,1)}$. Pero en la Proposición 3.1.1 demostramos que el límite de esos cuocientes es ϕ cuando i tiende al infinito. Es decir !! Sorpresa !!

$$f(1) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \phi.$$

■

Ejemplo 4.1.2 *Determinemos algunos términos de la sucesión* $\{a_i\}$ *tal que* $f(a_i) = \pi$.

Escribamos π como $3,14159\ldots$. Así vemos que la primera convergente es 3. La diferencia, que corresponde a $0,14159\ldots$, podemos escribirla como $0,14159\cdots = \dfrac{1}{\dfrac{1}{0,14158\ldots}} = \dfrac{1}{7+0,062513\ldots}$.De ahí vemos que la segunda convergente es $3+\dfrac{1}{7}=\dfrac{22}{7}$.

Repitamos el mismo proceso, ahora para la fracción $0,062513\ldots$ y obtenemos $0,062513\cdots = \dfrac{1}{\dfrac{1}{0,062513\ldots}} = \dfrac{1}{15+0.996594\ldots}$. Luego la tercera convergente es $3+\dfrac{1}{7+\dfrac{1}{15}}=\dfrac{333}{106}$.

Con tiempo, paciencia y ánimo podríamos continuar este proceso, que nos orienta para calcular cada término de la sucesión, usando la expresión

$$u_i = \left[\frac{1}{\dfrac{1}{f_{i-1}}}\right]$$

donde f_i indica la fracción obtenida en el cálculo anterior y los paréntesis de corchete representan a la función *parte entera*. En este caso, los primeros términos de la sucesión son: $3, 7, 15, 1, 292, 1, \cdots$. ■

4.2 Representación de números

Dado que cada fracción continuada $[a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots]$, genera una sucesión de convergentes, podemos notar lo siguiente:

• Cuando la sucesión de convergentes es finita, existe una última convergente (la k-ésima convergente), que naturalmente es un número racional α. Tal número α es el valor de la fracción continuada y lo escribimos $[a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots, a_k] = \alpha$.

• Cuando la sucesión de convergentes es infinita y converge a algún número α, asignaremos tal valor a la fracción continuada, diciendo que $[a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots] = \alpha$.

Proposición 4.2.1 *$\alpha \in \mathbb{Q}$ si sólo si α admite un desarrollo finito como fracción continuada.*

Demostración. Conforme a nuestra notación, sólo debemos demostrar que todo racional se puede escribir en la forma $[a_1; a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n]$. Sea $\alpha = \frac{a}{b}$. Apliquemos el algoritmo de Euclides a los números enteros a y b, obteniendo el siguiente conjunto finito de divisiones:

$$\begin{array}{rclcrcl}
a &=& ba_1 + r_1 & \text{de donde} & \frac{a}{b} &=& a_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} \\
b &=& r_1a_2 + r_2 & \text{de donde} & \frac{b}{r_1} &=& a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}} \\
r_1 &=& r_2a_3 + r_3 & \text{de donde} & \frac{r_1}{r_2} &=& a_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
r_{n-2} &=& r_{n-1}a_n + r_n & \text{de donde} & \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &=& a_n + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}} \\
r_{n-1} &=& r_na_{n+1} & \text{de donde} & \frac{r_{n-1}}{r_n} &=& a_{n+1}
\end{array}$$

Ahora escribimos

$$\frac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{a_{n+1}}}} = [a_1; a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}]$$

y vemos que corresponde a una fracción continuada finita. ∎

Acerca de la unicidad de la escritura del numero α, como fracción continuada, analicemos el caso $\alpha = \frac{13}{5}$ obteniendo:

$$\begin{array}{rclcrcl}
13 &=& 5\cdot 2 + 3 & \text{de donde} & \frac{13}{5} &=& 2 + \frac{1}{\frac{5}{3}} \\
5 &=& 3\cdot 1 + 2 & \text{de donde} & \frac{5}{3} &=& 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} \\
3 &=& 2\cdot 1 + 1 & \text{de donde} & \frac{3}{2} &=& 1 + \frac{1}{2}
\end{array}$$

Es decir $\frac{13}{5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$. Substituyendo el último 2 por la expresión $1 + \frac{1}{1}$ obtenemos $\frac{13}{5} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$.

Cada vez que $a_{n+1} \neq 1$, podemos efectuar un reemplazo similar al anterior obteniendo un desarrollo con último término igual a 1. Luego, imponiendo que el último término sea diferente de 1, conseguimos unicidad de la escritura, conforme a la siguiente

Proposición 4.2.2 *La escritura del racional α como fracción continuada con último término diferente de* 1 *es única.*

Demostración. Sean $[a_1; a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}]$ y $[b_1; b_2, \cdots, b_m, b_{m+1}]$ dos escrituras, como fracción continuada, del racional α, siendo $a_{n+1} \neq 1 \neq b_{m+1}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n \leq m$.

Como $a_1 = [\alpha]$ y también $b_1 = [\alpha]$, entonces las dos escrituras coinciden en su primer término. Análogamente se tiene que

$$a_2 = [(\alpha - a_1)^{-1}] \text{ y que } b_2 = [(\alpha - b_1)^{-1}]$$

Siendo $a_1 = b_1$, obtenemos que $a_2 = b_2$. Podemos continuar aplicando ese argumento, y como n es finito, llegaremos al punto en que $a_n = b_n + \dfrac{1}{b_{n+1} + \ddots}$. Si $a_n \neq b_n$, entonces $\dfrac{1}{b_{n+1} + \ddots} \in \mathbb{Z}^*$. Luego $\dfrac{1}{b_{n+1} + \ddots} = 1$ y tenemos que $m = n + 1$ con $b_m = 1$, lo que contradice nuestra hipótesis. En consecuencia $a_n = b_n$. ■

Como las convergentes α_k del número α son números racionales, podemos escribirlas en la forma irreducible $\alpha_k = \dfrac{p_k}{q_k}$. Con esa notación, confeccionamos la tabla:

i	1	2	3	$\cdots$
a_i	a_1	a_2	a_3	$\cdots$
p_i	a_1	$a_1a_2 + 1$	$a_3(a_1a_2 + 1) + a_1$	$\cdots$
q_i	1	a_2	$a_2a_3 + 1$	$\cdots$

,

que sugiere la siguiente

Proposición 4.2.3 *Si* $\alpha_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ *son las convergentes del número* $\alpha = [a_1; a_2, \cdots]$, *donde* $(p_k, q_k) = 1$, *entonces para cada* k *se tiene:*

$$p_{k+2} = a_{k+2}p_{k+1} + p_k \text{ y } q_{k+2} = a_{k+2}q_{k+1} + q_k.$$

Demostración. Ejercicio. ∎

Observe la que se usa el mismo algoritmo para generar las sucesiones p_i y q_i Además, cuando $a_i = 1$, para todo $i \geq 3$, se trata de la sucesión de Fibonacci que designamos como $F(p_1, p_2)$ y $F(q_1.q_2)$ respectivamente. La Proposición 4.2.3 permite calcular rápidamente las convergentes cuando se conoce la fracción continuada, como lo muestra el siguiente ejemplo para $\alpha = [1; 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
p_i	1	3	10	43	53	149	500	2149	2649	7447	24990	107407
q_i	1	2	7	30	37	104	349	1500	1849	5198	17443	74970
α_i	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{43}{30}$	$\frac{53}{37}$	$\frac{149}{104}$	$\frac{500}{349}$	$\frac{2149}{1500}$	$\frac{2649}{1849}$	$\frac{7447}{5198}$	$\frac{24990}{17443}$	$\frac{107407}{74970}$

Proposición 4.2.4 *Si* $\alpha_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ *son las convergentes del número* $\alpha = [a_1; a_2, \cdots]$, *donde* p_k *y* q_k *son primos relativos, entonces para cada* k *se tiene:*

$$p_k q_{k+1} - p_{k+1} q_k = (-1)^k$$

Demostración (Por inducción en k)

Como $p_1q_2 - p_2q_1 = a_1 \cdot a_2 - (a_1a_2 + 1) \cdot 1 = -1$, se tiene que la igualdad a demostrar es válida para $k = 1$. Supongamos que la igualdad es válida para $k = n$. Podemos escribir, usando la Proposición 4.2.3 :

$$\begin{aligned} p_{n+1}q_{n+2} - p_{n+2}q_{n+1} &= p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) - (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} \\ &= p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} \\ &= -(p_nq_{n+1} - p_{n+1}tq_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Luego la propiedad también vale para $k = n + 1$.. ∎

Bibliografía

[1] **Jones, B.W.**, *Teoría de los Números*, F. Trillas, S.A. México (1969).

[2] **Huntley, H.E.**, *The Divine Proportion: a study in mathematical beauty*, Dover Publications, Inc. N.Y. (1970).

[3] **Veque, W.E. Le**, *Teoría Elemental de los Números*, Herrero Hermanos, Sucs., S.A. México (1968).

[4] **Perelman, Y.**, *Algebra Recreativa*, Editorial Mir, Moscú (1969).

[5] **Vorob'ev, N.N.**, *Fibonacci Numbers*, Blaisdell Publishing Company, N.Y. (1961).