CUBO Matemática Educacional
Vol. 5, Nº 2, (263-288). JUNIO 2003.

Algebra no conmutativa: Del finito al infinito

Consuelo Martínez*
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo,
C/ Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo SPAIN

ABSTRACT

Our aim in this survey is to present a general view (in a very personal approach) of the main advances in non-commutative algebra during the twentieth century, mainly in its second half. In the first part, we focuss on problems that were solved in the last half of the XX Century, but were originated long ago and they are nucleated around the restricted Burnside problem. In the second part emphasis is given to very new problems, generated and solved in the last part of the century. In this case, the exposition is articulated around the Moonshine Conjecture.

1 Introducción

Las presentes notas constituyen en esencia el contenido de mi contribución al curso que, bajo el título: "HITOS MATEMÁTICOS DE FINALES DEL SIGLO XX", se impartió en El Escorial en agosto de 2001. En mi caso concreto, la evolución del Álgebra no-conmutativa fue el objeto de mis charlas. Claramente, el hacer una exposición exhaustiva de todos los avances de esta parte de las matemáticas durante la segunda mitad del Siglo XX es un objetivo inviable, por ello uno se ve en la necesidad de elegir algunos temas en los que centrarse. Esta elección ha estado claramente basada en razones de gusto personal y proximidad a mi propia línea de investigación. En ningún caso debería entenderse que los muchos temas que han sido omitidos de esta presentación han sido considerados poco relevantes o de menor interés.

*Partially supported by PB97-1291-C03-01

Los motivos para el título tienen sus raices en el hecho de que el paso de dimensión finita a infinita (en general de estructuras finitas a infinitas), junto con la supresión de la conmutatividad, es una tendencia a resaltar en la evolución del Álgebra durante el siglo pasado. Dado que se impartieron dos conferencias sobre el tema, la presentación está dividida en dos partes. En la primera de ellas pretendemos abordar problemas que, resueltos a finales del Siglo XX, tuvieron su planteamiento mucho antes. Con el objetivo de dar una cierta unidad a la exposición se ha usado el teorema restringido de Burnside como hilo conductor. En la segunda parte nos centramos en problemas que son muy nuevos, tanto en su origen como en las soluciones obtenidas. En este caso se articulan alrededor de la Conjetura Moonshine, en cuya solución se han usado conceptos y herramientas matemáticas de muy reciente desarrollo, en muchos casos originadas por problemas de la Física. Necesariamente en estas notas solo se pretende realizar un esbozo de los mismos.

PARTE I

Comenzaremos la historia a principios del siglo XX (1908) cuando H. M. Wedderburn desarrolla la teoría de las álgebras finito dimensionales probando la existencia de un único ideal nilpotente maximal N ($N^s = (0)$ para algún s) tal que el cociente A/N es isomorfo a una suma directa de álgebras, cada una isomorfa a un álgebra de matrices sobre un anillo de división

$$A/N \simeq \mathcal{M}_{n_1}(D_1) \oplus \mathcal{M}_{n_2}(D_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_{n_s}(D_s)$$

De hecho podriamos retroceder algo más en el tiempo y empezar en 1837 con la introducción de los cuaternios por Hamilton.

Hamilton llega a los cuaternios inspirándose en la representación de los complejos como pares de números reales. ¿ Qué ocurre si consideramos ternas? Cada terna $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ puede escribirse como combinación lineal de $x_1 = (1,0,0)$; $x_2 = (0,1,0)$ y $x_3 = (0,0,1)$. La suma y la multiplicación por un número real serán las usuales y la distributividad del producto respecto de la suma hace que la ley producto quede fijada por los 9 productos $x_i x_j = \alpha_{ij1} x_1 + \alpha_{ij2} x_2 + \alpha_{ij3} x_3$. La asociatividad (que se quiere preservar) se traduce en una serie de relaciones entre las 27 constantes de estructura α_{ijh}.

Hamilton considera a continuación cuaternas, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1 \mathbf{1} + \alpha_2 \mathbf{i} + \alpha_3 \mathbf{j} + \alpha_4 \mathbf{k}$, $\mathbf{1} = (1,0,0,0)$, $\mathbf{i} = (0,1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,0,1)$, y realiza el mismo proceso. La asociatividad de la multiplicación conduce a la conocida tabla:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	- j
j	j	- k	- 1	i
k	k	j	- i	- 1

Posteriormente, Cayley se aproxima a los cuaternios via matrices: $H = \{\begin{pmatrix} z & u \\ -\bar{u} & \bar{z} \end{pmatrix} : u, z \in C\} \subseteq \mathcal{M}_2(C)$. Se obtiene así un álgebra de división (asociativa) de dimensión 4 sobre R con base $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, que no es conmutativa.

El proceso de construcción de los cuaternios a partir de los complejos ha sido generalizado posteriormente en el conocido como proceso de Cayley-Dickson, que permite construir a partir de un álgebra A con identidad y con una involución (cumpliendo que la suma y el producto de un elemento y su imagen por la involución son elementos del cuerpo) otra álgebra B con identidad y con una involución, que contiene a A como subálgebra y cuya dimensión es el doble de la dimensión de A. Usando dicho proceso se pueden construir, a partir de los cuaternios, los octoniones o números de Cayley, primer ejemplo de álgebra de división real no-asociativa.

Volvamos a Wedderburn y a su teorema, que constituye el primer teorema de estructura para álgebras (asociativas y finito dimensionales) sobre un cuerpo arbitrario. Su estrategia consiste en "descartar la parte no deseable"(en este caso la nilpotencia) y describir la parte "buena"en función de objetos bien conocidos: las matrices.

Este teorema ha sido generalizado posteriormente en diversas direcciones. Particularmente importante es la extensión a dimensión infinita de Artin. Podemos decir que Artin trata de imponer las condiciones mínimas exigibles para recuperar un teorema similar, pero sin suponer dimensión finita. Se obtiene así el

Teorema de Wedderburn-Artin: Si R es un anillo artiniano semisimple (es decir, sin ideales nilpotentes no nulos), entonces R es isomorfo a una suma directa de un número finito de anillos de matrices $\mathcal{M}_{n_i}(D_i)$ sobre anillos de división D_i. Además los n_i y los D_i están unívocamente determinados por R. El recíproco es también válido.

Aparecen así los anillos de división jugando un importante papel en la estructura de álgebras asociativas. Claramente, si el álgebra es de dimensión finita sobre el cuerpo, los anillos de división involucrados son también finito-dimensionales. Recordemos que todo anillo de división finito es un cuerpo (*Wedderburn*) y que la dimensión de un álgebra de división finito-dimensional sobre los reales es 1,2,4 ó 8 (*Milnor-Bott y Kervaire*).

Los primeros ejemplos de álgebras de dimensión infinita aparecen con la axiomatización de la geometría por Hilbert y con el desarrollo de la mecánica cuántica. Tambien von Neumann suministra nuevos ejemplos de álgebras infinito-dimensionales con álgebras de operadores sobre espacios de Hilbert.

La teoría general de estructura de álgebras infinito-dimensionales se debe a Natan Jacobson.

Si D es un anillo de división y V es un D-espacio vectorial de dimensión finita, entonces $End_D(V) \simeq Mat_n(D)$ es simple y artiniano a izquierda y derecha, pero sin la hipótesis de finitud $End_D(V)$ ya no es (necesariamente) ni simple ni artiniano. Sin embargo es un anillo **primitivo**, es decir, existe un módulo a izquierda sobre él, que es simple y fiel.

Si R es un anillo primitivo y A un R-módulo simple y fiel, entonces $D = Hom_R(A, A)$ es un anillo de división. Jacobson probó que el anillo R es isomorfo a un subanillo denso de endomorfismos del D-espacio vectorial A (*Teorema de densidad de Jacobson*).

Recordemos que R es un subanillo denso de $End_D(V)$ si dados n vectores $v_1, \ldots, v_n$ linealmente independientes en V y otros n vectores arbitrarios $a_1, \ldots, a_n$, siempre existe un endomorfismo $f \in R$ cumpliendo que $f(v_1) = a_1, \ldots, f(v_n) = a_n$.

Jacobson probó también que todo anillo R contiene un ideal $J(R)$(*el radical de Jacobson de* R) que puede definirse como la intersección de los anuladores a izquierda de los R-módulos simples a izquierda (entre varias otras definiciones equivalentes) de modo que $J(R/J(R)) = (0)$. Además un anillo R es semisimple Jacobson (es decir, $J(R) = (0)$) si y sólo si es un producto subdirecto de anillos primitivos.

Otra fuente importante de ejemplos de álgebras de dimensión infinita es la teoría de grupos y la topología, con grupos de matrices y grupos fundamentales de variedades. Es en este contexto de geometría y topología dónde surgen los grupos definidos por generadores y relaciones, que se estudian en la denominada teoría combinatoria de grupos. Podemos situar en ella el problema restringido de Burnside, cuya solución ha constituido uno de los grandes hitos del álgebra de finales del siglo XX y cuya historia y resolución está estrechamente ligada a ciertas álgebras asociativas y no-asociativas.

En 1902 W. Burnside formuló el siguiente problema:

(PGB) ¿Es finito un grupo que está finitamente generado y cuyos elementos tienen todos orden finito?

Este problema generó una gran actividad en la teoría de grupos y tuvo un desarrollo paralelo a un problema planteado (independientemente) por Kurosh y Levitzky en teoría de anillos y que puede ser formulado del siguiente modo:

(PGK) ¿ Es nilpotente un anillo nil y finitamente generado? O bien, ¿ Es finito-dimensional un álgebra algebraica finitamente generada?

Ambos problemas se influyeron mutuamente y de hecho su solución aparece ligada a través del siguiente resultado de N. Jacobson:

Teorema Si $carF = p > 0$ y R es una F-álgebra nil generada por $a_1, \ldots, a_n$ y $\hat{R}$ es su envoltura unital (con el producto $(\alpha 1 + a)(\beta 1 + b) = \alpha\beta 1 + (\alpha b + \beta a + ab)$), entonces $1 + R \subseteq \hat{R}$ es un p-grupo, está generado por $1 + a_1, \ldots, 1 + a_n$ y es infinito si el anillo R no es nilpotente.

Golod y Shafarevich construyeron en 1964 un álgebra R finitamente generada, nil, pero no nilpotente sobre un cuerpo de característica p, para cualquier primo, dando así una respuesta negativa al PGK. Por el resultado de Jacobson, el grupo $1 + R$ es un contraejemplo al PGB.

Es notable que el ejemplo de Golod y Shafarevich es el único contraejemplo hasta la fecha al PGK, mientras que se han construido otros contraejemplos al PGB (Grigorchuck 1980, Gupta y Sidki 1983).

Parece natural plantearse la misma pregunta exigiendo la existencia de una cota superior para los órdenes de los elementos del grupo o para el índice de nilpotencia de los elementos del anillo (resp. para el grado de las identidades polinómicas satisfechas por los elementos del álgebra). Se tienen asi:

(POB) ¿ Es finito un grupo finitamente generado con exponente finito?

(POK) ¿ Es nilpotente un anillo nil, finitamente generado con nil-índice acotado? O bien, ¿ Es finito-dimensional un álgebra algebraica de grado acotado y finitamente generada?

Ahora la respuesta en grupos y en álgebras es diferente. Para las clases más importantes de álgebras : asociativas (Kaplansky, Levitzki, Shirshov), alternativas y Jordan (Zhevlakov, Jacobson, McCrimmon, Zelmanov), de Lie (Kostrikin, Zelmanov), la respuesta es afirmativa.

Las ideas desarrolladas en álgebras fueron de gran ayuda para abordar el problema en grupos, que puede ser reformulado del siguiente modo:

Sea $F(d)$ el grupo libre de rango d y $B(m,d) = F(d)/F(d)^m$ el grupo de Burnside libre de exponente m y rango d. El POB es equivalente a la pregunta ¿Es $B(m,d)$ finito?

Es trivial que dicha respuesta es si para $m = 2$ y el propio Burnside lo probó para $m = 3$. También se tienen respuestas positivas para $m = 4$ y para $m = 6$ debidas a Sanov y a M. Hall Jr. respectivamente. Novikov y Adian probaron que $B(m,d)$ es infinito para todo $d \geq 2$ y $m \geq 4381$ impar. Ivanov lo hizo para grupos de exponente 2^k con k suficientemente grande. En consecuencia, los grupos $B(m,d)$ son infinitos siempre que m es "suficientemente" grande y $d \geq 2$.

Sin embargo sigue siendo un problema abierto determinar para que valores de d, m el grupo $B(m,d)$ es finito. No se conoce la respuesta incluso para $m = 5$.

Queda, sin embargo, considerar la posibilidad de que aún siendo $B(m,d)$ infinito, el número de cocientes finitos suyos sea finito. Dicho de otro modo, puede ocurrir que el orden de un grupo *finito* d-generado y con exponente m esté acotado por una función $f(m,d)$ que depende sólo del número de generadores d y del exponente m. Este problema fué bautizado por Magnus como *Problema Restringido de Burnside* (**PRB**).

Un hito importante en la resolución del PRB es el teorema de reducción de Hall y Higman

Teorema Si $n = p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$ y el PRB tiene solución para grupos de exponente $p_i^{k_i}$, tambien tiene solución para grupos de exponente n si:

a) Existe un número finito de grupos simples d-generados de exponente m,

b) Si G es simple finito, $Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$ es resoluble

Actualmente, se sigue de la clasificación de los grupos simples finitos que tanto a) como b) se cumplen.

Kostrikin prueba en 1958 la validez del PRB para grupos de exponente primo p. Esbozamos a continuación la idea de la demostración.

Si G es un p-grupo finito, $G = G_1 > G_2 > \cdots > G_m = 1$ es su serie central descendente, entonces $L(G) = \oplus G_i/G_{i+1}$ pasa a ser un anillo de Lie con el producto, definido sobre elementos homogéneos, siguiente: $[a_iG_{i+1}, a_jG_{j+1}] = (a_i, a_j)G_{i+j+1}$ (ahora el paréntesis se usa para denotar el conmutador de los elementos $a_i, a_j \in G$).

Si $\exp(G) = p$, entonces $L(G)$ es Z/pZ-álgebra de Lie y satisface la identidad de Engel $E_{p-1} : [[x, \underbrace{y], y, \ldots, y}_{p-1}] = 0$.

Si $G = < a_1, \ldots, a_d >$, entonces $L(G)$ está generada por $a_1G_2, \ldots, a_dG_2$.

Kostrikin prueba el siguiente

Teorema: Si L es un álgebra de Lie d-generada sobre un cuerpo de característica p y satisface E_{p-1}, entonces L es nilpotente.

El teorema asegura que el álgebra de Lie $L(G)$ es nilpotente y que su índice de nilpotencia está acotado por una función que depende sólo de d. Ahora se sigue inmediatamente la finitud del grupo G.

Zelmanov ([52], [53]) resuelve el PRB para grupos de exponente p^k y por tanto via el teorema de reducción de Hall y Higman (módulo el teorema de clasificación de los grupos simples finitos) para grupos de cualquier exponente.

La situación ahora es mucho más complicada, pues $L(G)$ ya no es una Z_p-álgebra. Para subsanarlo, Zelmanov modifica la definición de $L(G)$ asociando a G una "nueva" álgebra de Lie, construida con la serie $\tilde{L}(G) = \oplus \tilde{G}_i/\tilde{G}_{i+1}$, en lugar de la serie central descendente, dónde $\tilde{G}_i$ denota el grupo generado por los conmutadores de longitud r con $r \geq i$ y las potencias p^t de conmutadores de longitud l con $lp^t \geq i$.

Tampoco se tiene ahora que el álgebra de Lie $\tilde{L}(G)$ satisfaga la identidad de Engel E_{p-1}, pero satisface la *identidad de Engel linealizada* $E^*_{p^k-1}$ y si ρ es un conmutador en los generadores, entonces $ad(\rho)^{p^k} = 0$.

Zelmanov prueba que en esas condiciones $\tilde{L}(G)$ es nilpotente, lo que de nuevo implica el PRB. También prueba que si R es un anillo de Lie y satisface una identidad de Engel, R es localmente nilpotente.

El PRB tiene aplicaciones inmediatas e importantes en términos de grupos profinitos (límites inversos de grupos finitos), pues es equivalente al POB para dichos grupos. Así, Zelmanov prueba con las mismas técnicas que todo grupo compacto infinito contiene un subgrupo abeliano infinito.

Notemos que en la resolución del PRB no sólo se usan métodos e ideas de teoría de álgebras de Lie, sino de otras álgebras no-asociativas. Concretamente, las álgebras de Jordan juegan un papel importante en la demostración en característica 2.

Volvamos a anillos y a las técnicas que hicieron posible la resolución de los problemas que nos ocupan. Uno de los instrumentos que han jugado un papel esencial es la teoría de álgebras con identidades polinómicas, introducidas por Kaplansky en 1941 (PI-álgebras). Un álgebra A es PI si existe un polinomio no nulo, $f(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$, tal que $f(a_1, \ldots, a_m) = 0 \ \forall a_1, \ldots, a_m \in A$.

Ejemplos: 1. Si un álgebra A cumple la identidad $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$, entonces A conmutativa

2. Decir que A cumple la identidad $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ es equivalente a decir que A es nilpotente de índice de nilpotencia $\leq n$.

El ejemplo 1 hace que se puedan considerar las PI-álgebras como álgebras que satisfacen una forma de conmutatividad. Por otra parte, el hecho de haber podido extender la teoría de estructura de las álgebras finito dimensionales ha originado que se vean las identidades polinómicas como una cierta condición de finitud.

Hay antecedentes no formales de la teoría. Por ejemplo Wagner notó que el álgebra de los cuaternios cumple la identidad $(x_1x_2 - x_2x_1)^2x_3 - x_3(x_1x_2 - x_2x_1)^2 = 0$, es decir, el elemento $[x_1, x_2]^2$ es central.

Kaplansky probó que un álgebra A primitiva y PI cumple que su centro Z es cuerpo y $\dim_Z A < \infty$.

Jacobson probó que un álgebra algebraica de grado acotado cumple una identidad polinómica.

¿ Qué puede decirse sobre las identidades polinómicas de una PI-álgebra?

¿ Cual es el menor grado de una identidad polinómica que satisface el álgebra de matrices?

Se ha probado que si A es una F-álgebra de dimensión finita n, entonces A satisface la *Identidad polinómica standard* de grado $n+1$:

$$S_{n+1} = \sum_{\sigma \in \Sigma(n+1)} (-1)^{|\sigma|} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n+1)}$$

Por tanto $\mathcal{M}_n(F)$ satisface S_{n^2+1}. Amitsur y Levitzky probaron que S_{2n} es la identidad standard de menor grado que satisface $\mathcal{M}_n(F)$.

Queda patente de lo dicho hasta el momento que el anillo $\mathcal{M}_n(k)$, dónde k es un cuerpo ó un álgebra de división, es un ejemplo arquetipo, que juega un papel especialmente significativo.

Si D es un álgebra de división central, $k = Z(D)$, entonces el grado de D sobre k es un cuadrado. E. Noether probó que en caso de existir un cuerpo intermedio K tal que la extensión K/k sea de Galois, entonces D puede recuperarse a partir del cuerpo intermedio K, del grupo de Galois de la extensión, $G(K/k)$ y un "conjunto factor" $f : G \times G \longrightarrow K^{\bullet}$. (Es decir, D es un producto cruzado, $D = (K/F, f)$).

Surge así naturalmente la pregunta: ¿Para qué anillos de división existe tal K?

Albert, Artin, Brauer, Hasse, Noether probaron que si F es un cuerpo de números existe tal cuerpo intermedio K.

Durante un tiempo se conjeturó que dicho cuerpo intermedio K existe para todo anillo de división D. Pero en 1972 Amitsur dió un ingenioso contraejemplo usando matrices genéricas y PI-teoría. Sin embargo, en un cierto sentido "débil" la conjetura es cierta. En efecto, Suslin y Merkuriev (1982) probaron que existe un r tal que $\mathcal{M}_r(F)$ posee tal subcuerpo K (en otras palabras, si bien no es cierto que toda álgebra de división central es un producto cruzado si que es semejante a un producto cruzado, es decir, está en la misma clase del grupo de Brauer).

Como se ha comentado, la teoría de PI-álgebras de Lie ha jugado un papel esencial en la resolución del PRB.

Otros ejemplos importantes de álgebras infinito dimensionales vienen dados por la envolvente universal de un álgebra de Lie ó el álgebra de Weyl $< x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} >$.

En el caso de álgebras infinito dimensionales, la dimensión no sirve como elemento de comparación. ¿Qué podemos utilizar en su lugar? La dimensión de Gelfand-Kirillov puede jugar en este caso un papel similar.

Definición Si A es una F- álgebra f.g. (no necesariamente asociativa) y V es un F-espacio vectorial de dimensión finita que genera A, denotemos V^n el espacio vectorial generado por los productos de longitud $\leq n$ de elementos de V.

$$GK - dim(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{ln(dimV^n)}{lnn}$$

La definición anterior no depende de la particular elección del espacio generador V.

En álgebras asociativas, de Lie, de Jordan, alternativas, ... se caracterizan las álgebras finito-dimensionales por tener GK-dimensión igual a 0. Es decir, $GK - dim(A) = 0 \iff dim_F(A) < \infty$. Además, no hay álgebras que tengan GK-dimensión entre 0 y 1 estrictamente.

En general, sin suponer que el álgebra es finitamente generada, se puede definir la GK-dimensión de A como el supremo de las correspondientes GK-dimensiones de sus subálgebras finitamente generadas, $GK - dim(A) = supGK - dim(A_0)$, $A_0 \leq A$, A_0 f.g.

En el caso asociativo, Bergman probó que no hay álgebras con GK-dimensión estrictamente comprendida entre 1 y 2, por tanto el rango de valores que puede tomar esta dimensión es: $GK - dim(A) = 0, 1, 2, s$ $\forall s > 2$.

Las álgebras asociativas con GK-dimensión igual a 1 fueron estudiadas por Small, Stafford y Warfield, que dieron su estructura: Si A es una F-álgebra (asociativa) f.g. y $GK - dim(A) = 1$, entonces A es PI. Su radical primo N es nilpotente y R/N es un módulo finito sobre su centro.

Para álgebras de Jordan se ha obtenido un resultado similar en [27]. Si J es un álgebra de Jordan finitamente generada con GK-dimensión igual a 1, entonces el radical de Jacobson de J es nilpotente. Si J es semiprima, es un módulo finito sobre una subálgebra finitamente generada del centro asociativo.

Sin embargo no se conoce la estructura de las álgebras de Lie con GK-dimensión 1. Se sabe que si L es un álgebra de Lie, entonces su envolvente asociativa universal $U(L)$ tiene GK-dimensión finita si y sólo si la dimensión de L es también finita. En tal caso, $GK - dimU(L) = dim_K L$. En todo caso, no se puede aspirar a un resultado similar al conocido en los casos asociativo y de Jordan, ya que el álgebra de Lie asociada a un grupo de Grigorchuck tiene GK-dimensión 1 y su comportamiento no obedece el patrón de los casos asociativo y Jordan.

Sin embargo, O. Mathieu ha estudiado álgebras de Lie simples graduadas con cre-cimiento finito (que corresponde a GK-dimensión finita) obteniendo la clasificación completa de dichas álgebras.

El estudio de anillos graduados (asociativos) con GK-dimensión finita constituye un activo campo de trabajo denominado "Geometría Algebraica no-conmutativa", en el que, entre otros, trabajan M. Artin, J. Tate, van der Bergh, J. Stafford, . . .

No se conoce ningún dominio que no tenga por GK-dimensión un número entero. El estudio general de los dominios con GK-dimensión 2 parece intratable, pero M. Artin y J. T. Stafford han clasificado los *dominios graduados* con dicha GK-dimensión (ver [1], [40]).

Esta situación contrasta con la que se tiene en el caso de grupos, dónde la noción de crecimiento ha sido ampliamente estudiada. La noción de crecimiento en grupos finitamente generados fue introducida por Milnor y Wolf (en relación con la curvatura de variedades Riemannianas)(ver [30]).

Wolf prueba que si G es policíclico, entonces o bien tiene un subgrupo nilpotente de índice finito y crecimiento polinomial o bien G no tiene tal subgrupo y tiene crecimiento exponencial.

Posteriormente, Milnor prueba que si G es resoluble (no policíclico), entonces G tiene crecimiento exponencial.

Para grupos lineales, Tits prueba que dado G un grupo lineal, o bien G es nilpotente por finito (y por tanto con crecimiento polinomial) o bien G contiene un subgrupo libre de rango 2 (y por tanto tiene crecimiento exponencial).

Estos resultados inducen a Milnor a conjeturar que:

1. Un grupo G tiene crecimiento polinomial si y sólo si es nilpotente por finito.

2. No hay grupos con *crecimiento intermedio*, es decir, estrictamente mayor que el crecimiento polinomial y estrictamente menor que el crecimiento exponencial.

La primera de las conjeturas es cierta, como prueba Gromov (en un contexto de grupos geométricos). Sin embargo, la segunda no lo es, ya que los grupos de Grigorchuck (contraejemplo del PGB) tienen crecimiento intermedio.

PARTE II

Comenzaremos esta parte con una breve referencia a la clasificación de los grupos simples finitos, que ha constituido uno de los proyectos más ambiciosos del siglo XX. Por supuesto está fuera de nuestra intención y de nuestro alcance tratar dicho tema en profundidad. Sólo queremos hacer un esbozo del mismo, aunque su mención aquí parezca entrar en contradicción con las observaciones de la introducción. En efecto, la clasificación de los grupos simples finitos es un reto que ha ocupado, no sólo la segunda mitad, sino prácticamente todo el siglo XX. La razón por la que la hemos incluido en este punto, aparte de que consideramos obligado hacer una referencia a ella, es por la conexión de uno de los grupos simples esporádicos, *el monstruo*, con la conjetura moonshine. La clasificación de los grupos simples finitos posee características peculiares que lo diferencian de otros resultados matemáticos. En efecto, han contribuido a ella infinidad de matemáticos y la demostración se encuentra distribuida en mas de 5000 páginas en diferentes revistas. En algunos casos se ha llegado a la construcción de un grupo usando potentes herramientas de computación. Es enteramente natural que un resultado de tal magnitud no haya podido ser contrastado, y cabe la posibilidad de que algún error sea detectado en posteriores revisiones. La clasificación fue declarada terminada en 1981 por Aschbacher y Gorenstein y desde entonces se acepta, generalmente, por la comunidad matemática. Se hace, por tanto, imposible dar una referencia concreta a dicha clasificación. Se puede ver en [39] una reciente panorámica de la situación actual y el camino recorrido.

Haciendo una brevísima revisión histórica, recordemos que la simplicidad de los grupos alternados A_n ($n \neq 4$) ya era conocida por Galois.

Jordan, Holder y Dickson probaron que $PSL(n, F) = SL(n, F)/Z$ es simple (excepto $n = 2$ y $|F| = 2$ ó 3).

Chevalley encontró un método uniforme para constuir familias de grupos simples finitos, análogos a los grupos de Lie simples complejos

También se conoce desde tiempo atrás la simplicidad de los grupos ortogonal y simplético ó de los grupos de Mathieu M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23} y M_{24}.

Janko descubrió el grupo que lleva su nombre en (1965).

Uno de los teoremas especialmente importante en el proceso de clasificación de los grupos simples finitos se debe a Feit y Thompson (1962), que probaron un resultado conjeturado por Burnside: Todo grupo de orden impar es resoluble.

De este modo, excluidos los grupos simples abelianos (es decir, los grupos cíclicos de orden primo) sólo podemos encontrar grupos simples de orden par, y cada uno de ellos contiene una involución (elemento de orden 2).

La consideración de los centralizadores de las involuciones juega así un papel muy importante. Brauer y Fowler (1965) probaron que existe un número finito de grupos simples que tienen una involución con un centralizador prefijado.

Los grupos simples se distribuyen en cuatro grandes familias: los abelianos, los grupos alternados A_n, los grupos de tipo Lie y 26 grupos esporádicos.

El mayor grupo esporádico es el grupo de Fischer-Griess conocido como el *monstruo* ó el *gigante amigo*, que tiene como orden $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \sim 10^{54}$ y puede representarse como grupo de automorfismos de un álgebra (conmutativa, pero no asociativa).

Fischer y Gries encontraron en 1973 evidencias de la existencia del mostruo y Conwey y Norton conjeturaron que debia tener una representación de grado 196883. Basándose en esta conjetura, Fischer, Livingstone y Thorne calcularon la tabla de caracteres del *monstruo* M.

McKay notó que las dimensiones de las dos menores representaciones del monstruo (1 y 196883) están relacionadas con los coeficientes de la *función elíptica modular*

$$J(q) = q^{-1} + 196884q + \cdots = \sum c(n)q^n.$$

Por tanto pensó que debia haber alguna conexión que explicara esta coincidencia, que es en esencia el contenido de la conjetura Moonshine.

McKay y Thompson notaron que otros coeficientes en la expresión de J son combinaciones lineales simples de las dimensiones de las representaciones irreducibles del *monstruo* M.

Basados en sus investigaciones, parecia deducirse que para cada $n \in Z$ existe un M-módulo $V(n)$, con dimensión $c(n)$ y carácter H_n, de modo que la serie (actualmente llamada función de McKay-Thompson) : $T_g = \sum H_n(g)q^n$ sería una función con interesantes propiedades.

Por todo ello, conjeturaron que debe existir un módulo graduado infinito dimensional $V = \oplus V(n)$ con carácter graduado T_g. Sorprendentemente, el módulo más natural para un grupo finito sería infinito dimensional. Después de calcular los primeros 11 coeficiente T_g, para todo $g \in M$, Conway y McKay formularon la conjetura según la cual T_g estaría relacionado con un subgrupo discreto de $SL(2,R)$ conmensurable con $SL(2,Z)$, es decir, formularon la Conjetura *Brillo de luna* (Moonshine).

Pasemos a dar, esquemáticamente, los conceptos necesarios para entender la formulación concreta de la conjetura Moonshine.

Si $\mathcal{H} = \{x+iy | y > 0\}$ es el hiperplano superior, el grupo $\Gamma = SL(2,Z)$ actúa sobre $\mathcal{H}$ del modo siguiente:

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\tau \in \mathcal{H}$, $g\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

El invariante modular j es una función holomorfa sobre $\mathcal{H}$, valorada en los complejos, que queda fija por la acción del grupo discreto Γ, es decir, $\forall\tau \in \mathcal{H}, g \in SL(2,Z)$, se tiene que $j(g\tau) = j(\tau)$. La función elíptica modular se obtiene al normalizar el invariante modular, $J = j - 744$ y se puede expresar su desarrollo en serie en función de $q = e^{2\pi i}$

En la situación general, dos subgrupos G, $H \subseteq SL(2,R)$ son *conmensurables* si los índices $|G : G \cap H|$ y $|H : G \cap H|$ son finitos.

El hecho de que el subgrupo G tenga género 0 es equivalente a que la superficie de Riemann correspondiente tenga género 0. Entonces existe una biyección $F : \mathcal{H}^*/G \to C \cup \{\infty\}$ ($\mathcal{H}^*$ se obtiene uniendo a $\mathcal{H}$ los puntos cúspide, que son el único punto fijo de un cierto subgrupo parabólico de G) t.q. toda función meromorfa de $\mathcal{H}$ fijada por G es función racional de F.

Se dice que F es un *Hauptmodul* si $F(i\infty) = \infty$. En tal caso, F se puede escribir como función (serie de Fourier) de $q = e^{\frac{2\pi i\tau}{r}}$:

$$F = \sum_{n \in Z} a_n q^n$$

Por ser G de género 0 se sabe que todos los coeficientes $a_n = 0$, $\forall n \leq -2$.

F es un Hauptmodul normalizado si $a_0 = 0, a_{-1} = 1$

Con las definicions anteriores ya podemos formular la

Conjetura Moonshine (Conway y McKay) Para todo $g \in M$, la serie T_g es un "Haupt-modul" (módulo principal) para un subgrupo discreto de género 0 de $SL(2,R)$ conmensurable con $SL(2,Z)$.

Así, probar la conjetura Moonshine es equivalente a probar la existencia del M-módulo graduado V y después probar que sus trazas son los Hauptmodul calculados.

Conway y Norton pensaron que existe una superálgebra de Lie que explica la conjetura Moonshine.

En 1982, Atking, Fong, Smith hallaron evidencia casi completa de la conjetura con ordenador

En 1983, Frenkel, Lepowsky y Meurman construyen el módulo Moonshine, que tiene una rica estructura algebraica. Es un álgebra vértice (Vertex algebra) sobre la que actúa Virasoro.

Finalmente en 1992 Borcherds consiguió probar la Conjetura Moonshine, con una bella prueba que utiliza muchas estructuras algebraicas, algunas recientemente construidas y estudiadas y que abre la puerta a nuevas e interesantes cuestiones y direcciones para la futura investigación.

Entre los inngredientes utilizados por Borcherds en su demostración están las álgebras vértice, las álgebras generalizadas de Kac-Moody, superálgebras, ...

Pasemos ahora a comentar, en algunos casos muy brevemente y en otros con un poco más de extensión las estructuras mencionadas, que han jugado, como se ha dicho, un papel importante en la demostración de la conjetura Moonshine.

Álgebras de Kac-Moody

Un álgebra de Lie finito-dimensional simple compleja está completamente caracterizada por $3l$ generadores, $\{e_i, f_i, h_i | i = 1, \ldots, l\}$ que cumplen la identidad de Jacobi y relaciones:

$[h_i, h_j] = 0$; $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$;
$[h_i, e_j] = \alpha_{ij} f_j$; $[h_i, f_j] = -\alpha_{ij} f_j$;
$(ade_i)^{1-\alpha_{ij}} e_j = 0$; $(adf_i)^{1-\alpha_{ij}} f_j = 0$, $i \neq j$.

De este modo, el álgebra de Lie L queda unívocamente determinada por su *matriz de Cartan* $A = (\alpha_{ij})$ y es conocido que A es una matriz con elementos enteros, $\alpha_{ii} = 2$, $\alpha_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, $\alpha_{ij} = 0$ si y sólo si $\alpha_{ji} = 0$, y $detA > 0$.

Las álgebras de Kac-Moody fueron introducidas en 1968 independientemente por V. Kac y por R. Moody. El objetivo de Kac era clasificar las álgebras de Lie simples graduadas $L = \sum_{i \in Z} L_i$ de crecimiento finito, es decir, $dimL_i$ está acotada por un polinomio en $|i|$ (lo que fue realizado finalmente por O. Mathieu). Moody intentaba generalizar la construcción de las álgebras de Lie finito-dimensionales semisimples a partir de su matriz de Cartan A, eliminando la condición de que $detA > 0$. Denotemos $\mathcal{L}(A)$ el álgebra de Kac-Moody asociada a una matriz de Cartan generalizada A como se ha comentado anteriormente.

Entre las álgebras de Kac-Moody, las que juegan un papel más destacado son las *álgebras afines* que corresponden a una matriz A cumpliendo que $detA = 0$ y todos los menores propios son positivos. Kac y Moody dan una realización concreta de las álgebras afines que muestra que son álgebras graduadas de crecimiento finito. Si $\mathcal{G}$ es un álgebra de Lie con una forma bilineal simétrica invariante $(,)$, la afinización de $\mathcal{G}$ es el álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \otimes C[t, t^{-1}] \oplus Cc$ con el producto (corchete) satisfaciendo: $[c, x] = 0$, $[a \otimes t^n, b \otimes t^m] = [a, b] \otimes t^{n+m} + (a, b) n \delta_{n+m,0} c$, dónde c denota un elemento canónico central , $x \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $a, b \in \mathcal{G}$.

Sea d la derivación de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$: $[d, a \otimes f(t)] = a \otimes t \frac{df(t)}{dt}$.

El álgebra de Lie $\tilde{\mathcal{G}}$ es el producto semidirecto de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ y Cd. El álgebra de Lie afín (untwisted) se obtiene por el proceso anterior cuando $\mathcal{G}$ es simple finito dimensional.

Las álgebras de Lie afines aparecen en física, por vez primera, como las simetrías de una clase importante de teorías de campos conformales en dos dimensiones. Juegan un papel fundamental en el análisis de fenómenos críticos en sistemas estadísticos 2-dimensionales y son la clase de álgebras de Kac-Moody mejor conocidas, con una clasificación y una teoría de representación similar a la de las álgebras de Lie simples finito-dimensionales.

Las álgebras de Kac-Moody generalizadas fueron introducidas por Borcherds.

Definición. Sea I un conjunto finito ó Z_+ y $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ una matriz simétrica real tal que $a_{ij} \leq 0$ si $i \neq j$, $\frac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in Z$ si $a_{ii} > 0$.

Sea H un espacio vectorial complejo con una forma bilineal simétrica y elementos h_i, $i \in I$ t.q. $(h_i, h_j) = a_{ij}$ (no se exige la independencia lineal de los h_i).

El álgebra generalizada de Kac-Moody asociada a A con subálgebra de Cartan H es el álgebra de Lie L generada por H y por elementos e_i, f_i, $i \in I$ con las relaciones:

(1) $[h, h'] = 0$, $\forall h, h' \in H$

(2) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j$,

(3) $[h, e_j] = (h, h_j) e_j$, $[h, f_j] = -(h, h_j) f_j$,

(4) $(ade_i)^{1-\frac{2a_{ij}}{a_{ii}}} e_j = 0$, $(adf_i)^{1-\frac{2a_{ij}}{a_{ii}}} f_j = 0$.

En general, un álgebra de Kac-Moody generalizada no es un álgebra de Kac-Moody (lo es, por ejemplo, si $a_{ii} > 0$, el conjunto I es finito y A cumple algunas condiciones adicionales). El álgebra de Kac-Moody generalizada, que no es álgebra de Kac-Moody, más importante es el álgebra de Lie monstruo, que es de gran importancia en la conjetura Moonshine.

Tampoco toda álgebra de Kac-Moody es un álgebra de Kac-Moody generalizada. Si lo son las simetrizables (en las que se puede suponer que A es simétrica). En particular, las álgebras afines son álgebras generalizadas de Kac-Moody.

Borcherds prueba un teorema de reconocimiento, similar al probado por Kac para las álgebras afines, y que es esencial para probar que el álgebra monstruo es un álgebra de Kac-Moody generalizada.

Teorema Sea L un álgebra de Lie que satisface:

(i) L es graduada, $L = \sum L_i$ con $dim L_i < \infty$ $\forall i \neq 0$, $[L_i, L_j] < L_{i+j}$,

(ii) Existe ω una involución de L con $\omega(L_i) = L_{-i}$ y $\omega_{|L_0} : a \to -a$,

(iii) Existe una forma bilineal $(,)$ cumpliendo que es definida positiva en L_i, $i \neq 0$, $(L_i, L_j) = 0$ si $i \neq j$ y $([g,x],y) = -(x,[\omega g, y])$.

Entonces L es álgebra generalizada de Kac-Moody.

Algebras Vértice (Vertex Algebras)

Las álgebras vértice se utilizan en la teoría de representaciones de álgebras de Lie afines. Esencialmente son espacios vectoriales con infinitas operaciones formales, los operadores vértice, que actúan sobre el espacio vectorial y satisfacen ciertas propiedades.

Las álgebras vértice fueron introducidas para construir explícitamente representaciones de peso máximo de álgebras de Lie afines.

Un álgebra vértice es un espacio vectorial V con un vector especial 1 y unos "operadores vértice"

$$Y(v,z) = \sum_{n \in Z} v(n) z^{-n-1} \in End(V)[[z]]$$

para cada $v \in V$, que son lineales en v y cumplen algunas propiedades adicionales.

Álgebras de Lie Z-graduadas simples graduadas

Como se ha mencionado ya, el objetivo de Kac al estudiar álgebras de Kac-Moody era la clasificación de las álgebras de Lie simples graduadas de crecimiento finito. Además la mayoría de las álgebras "destacadas" que aparecen pertenecen a esta clase, lo que hace que su estudio sea un objetivo natural y de gran importancia.

V. Kac conjeturó que si L es un álgebra de Lie simple graduada de crecimiento finito, entonces es un álgebra de Lie simple de dimensión finita, ó un álgebra afín, ó un álgebra de Cartan, ó W, el álgebra de Virasoro

Recordemos que W, el álgebra de Virasoro, tiene una base: $\{e_j, j \in Z\}$ con $[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}$. Se considerará también su subálgebra $W_1 = F(e_i | i \geq -1) \subseteq W$.

El álgebra W_n es el álgebra de derivaciones de $F[T_1, \ldots, T_n]$. Ciertas subálgebras notables suyas (Especiales, Hamiltonianas y de contacto) constituyen las álgebras de Cartan.

O. Mathieu retoma el problema y lo resuelve consecutivamente en una serie de artículos.

Teorema 1 (1984) Si L es un álgebra de Lie simple graduada, $L = \oplus_{i \in Z} L_i$ y cumple que $dim L_n \leq 1$, $\forall n$, L es isomorfa (como álgebra graduada) a $sl(2)$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ (dos álgebras afines concretas), W_1 o W.

Teorema 2 (1986) Si L es un álgebra de Lie simple graduada de crecimiento ≤ 1 (es decir, $dim L_i$ uniformemente acotadas), entonces L es isomorfa a un álgebra de Lie simple de dimensión finita, a un álgebra afín, a W o a W_1.

Teorema 3 (1992) Si L es un álgebra de Lie simple graduada de crecimiento finito(es decir, $\frac{log(1+dim L_n)}{log(1+|n|)} < C$), entonces L es isomorfa a una de las siguientes álgebras, cada una de ellas con una conveniente graduación:

i) Algebra de Lie simple finito dimensional

ii) Algebra (twisted) afín

iii) Algebra de Cartan

iv) W.

De este modo, Mathieu da una respuesta positiva a la conjetura de Kac.

Un resultado análogo para álgebras de Jordan es también conocido. Para quien esté familiarizado con la estructura de Jordan (y con el objetivo de resaltar las analogías y diferencias entre los casos Lie y Jordan) enunciamos a continuación los resultados, cuya demostración y detalles se encuentran en [28].

Teorema A Sea $J = \sum_{i \in Z} J_i$ un álgebra de Jordan simple graduada de crecimiento finito, es decir, $dim J_i < |i|^c + d$ con c, d constantes. Supongamos que J tiene dimensión infinita. Entonces J es isomorfa a una de las siguientes álgebras de Jordan:

i) El álgebra de Jordan simple asociada a una forma bilineal simétrica no-degenerada sobre un espacio vectorial V, ó

ii) Un álgebra loop $\mathcal{L}(A)$ con A un álgebra de Jordan simple finito dimensional.

Teorema B Sea $J = \sum_{i \in Z} J_i$ un álgebra de Jordan prima no degenerada de creci-miento 1. Entonces

(i) J es simple graduada (luego su estructura viene dada por el teorema anterior), ó

(ii) sólo un número finito de componentes positivas (resp. negativas) es no-cero y existe un álgebra A, Z/nZ-graduada finito-dimensional y un monomorfismo de álgebras graduadas $\varphi : J \to \mathcal{L}(A)$ tal que $\varphi(J_k) = \mathcal{L}(A)_k$ para todo k suficientemente grande.

Superálgebras

Pasamos ahora a considerar las superálgebras, que tienen también su origen en Física. Aunque inicialmente surgen en un contexto de topología algebraica y álgebra homológica, el desarrollo de las superálgebras se debe al interés por explicar simultáneamente la simetría y la antisimetría en Física.

Una superálgebra es un álgebra $Z/2Z$-graduada, $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$, $A_{\bar{i}} \cdot A_{\bar{j}} \subseteq A_{\bar{i}+\bar{j}}$. $A_{\bar{0}}$ y $A_{\bar{1}}$ se denominan parte par y parte impar de la superálgebra respectivamente.

Si V es un espacio vectorial de dimensión contable, $G(V) = G(V)_{\bar{0}} + G(V)_{\bar{1}}$ es el álgebra de Grassmann sobre V, es decir, el cociente del álgebra tensorial por el ideal generado por los tensores simétricos, entonces $G(V)$ es una superálgebra cuya parte par es la clausura lineal de los productos de longitud par y la parte impar es la clausura lineal de los productos de longitud impar.

Si A es una superálgebra, $G(A) = A_{\bar{0}} \otimes G(V)_{\bar{0}} + A_{\bar{1}} \otimes G(V)_{\bar{1}} \leq A \otimes G(V)$ es la *envolvente de Grassmann de A*. De este modo, si $\mathcal{V}$ es una variedad de álgebras (associativas, Lie, Jordan, alternativas ...), una superálgebra $A = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}$ es una $\mathcal{V}$-superálgebra si $G(A) \in \mathcal{V}$.

Así, por ejemplo, las identidades anticonmutativa y de Jacobi que definen a un álgebra de Lie se transforman en *superanticonmutativa* y *super identidad de Jacobi* para definir superálgebras de Lie. Análogamente, una superálgebra de Jordan está definida por las identidades *superconmutativa* y la *superidentidad de Jordan*. Notemos, sin embargo, que una superálgebra asociativa es simplemente un álgebra asociativa $Z/2Z$-graduada.

C.T.C. Wall, en 1963, probó que una superálgebra asociativa simple finito-dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado F es isomorfa a $A = M_{m+n}(F)$ (con $A_{\bar{0}} = \{\begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}\}$, $A_{\bar{1}} = \{\begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix}\}$) ó a $A = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in M_n(F)\}$.

La clasificación en el caso de Lie se debe a V. Kac, que prueba el siguiente

Teorema. Una superálgebra de Lie simple finito dimensional sobre un cuerpo algebraicamente cerrado F of característica 0 es isomorfa a un álgebra de Lie simple ó a una "superálgebra de Lie clásica"(la representacion de L_0 sobre L_1 es completamente reducible): $A(m,n), B(m,n)$, $C(n)$, $D(m,n)$, $D(2,1;\alpha)$, $F(4)$, $G(3), P(n), Q(n)$, ó bien es una superálgebra de Cartan:

$W(n), S(n), \tilde{S}(n), H(n)$.

Usando esta clasificación, Kac pudo obtener también la clasificación de las superálgebras de Jordan simples finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0 (con una adición posterior debida a Kantor, que corresponde a superálgebras definidas por un corchete).

El método que utiliza Kac es la construcción de Kantor-Koecher-Tits, que relaciona las estructuras de Lie y de Jordan.

Si L es un álgebra (resp. superálgebra) de Lie y contiene una subálgebra $sl(2) = Fe + Fh + Ff$, de modo que $adh : L \to L$ es diagonalizable con $-2, 0, 2$ como únicos valores propios, denotemos $L = L_{-2} + L_0 + L_2$ la descomposición de L en suma de subespacios fundamentales. Se puede dotar a $J = L_{-2}$ de estructura de álgebra de Jordan definiendo $x_{-2} \cdot y_{-2} = [[x_{-2}, f], y_{-2}]$.

El álgebra L se puede recuperar (salvo extensiones centrales) a partir del álgebra de Jordan $J = L_{-2}$

Recíprocamente, si J es un álgebra de Jordan con 1, existe (salvo isomorfismo) un único par $(L, sl_2(F))$ con $sl_2(F) \subseteq L$, L álgebra de Lie, que cumple las propiedades anteriores y tal que $J \simeq L_{-2}$ y L tiene centro trivial. El álgebra $L = K(J) = J^- + [J^-, J^+] + J^+$ se llama álgebra de Lie asociada a J por la construcción de Kantor-Koecher y Tits.

Podemos resumir lo anterior diciendo que toda álgebra de Jordan J tiene asociada un álgebra de Lie $K(J)$ y, recíprocamente, si un álgebra de Lie L contiene una "buena subálgebra $sl_2(F)$", entonces tiene asociada un álgebra de Jordan J que "contiene"toda la información sobre L.

Así, lo que hizo Kac fue revisar las superálgebras de Lie de su clasificación que tenian una "buena estructura de Jordan".

No se conoce nada, de momento, sobre las superálgebras de Lie simples finito dimensionales en característica prima. Sin embargo la situación es diferente en el caso de superálgebras de Jordan. Racine y Zelmanov han clasificado las superálgebras de Jordan simples finito dimensionales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica $p > 2$ con parte par semisimple (usando esencialmente teoría de representaciones) y (con técnicas distintas) se clasifican en [29] las superálgebras de Jordan con parte par no semisimple.

Las técnicas de demostración en [29] están inspiradas en un trabajo de clasificación ([20]) de ciertas superálgebras que son importantes en Física.

Un "álgebra superconformal "es una superálgebra de Lie Z graduada, simple graduada, $L = \sum_{i \in Z} L_i$, con $\dim L_i \leq d \; \forall i \in Z$ y conteniendo a Virasoro.

V. Kac y van de Leur conjeturaron en 1989 que $W(1, n)$ y algunas subsuperalgebras suyas de tipo Cartan (bien conocidas) constituyen la totalidad de las álgebras superconformales, dónde $W(1,n) = DerF[t^{-1}, t, \xi_1, \ldots, \xi_n]$ (superálgebra de superderivaciones).

Posteriormente,en 1997, S. J. Cheng y V. Kac encontraron un nuevo ejemplo de álgebra superconformal, $CK(6)$, por lo que se reformuló la conjetura para incluirla.

La conjetura sigue abierta, excepto en el caso de que la superálgebra de Lie contenga una buena subálgebra $sl_2(F)$ y por tanto pueda ser recuperada a partir de la correspondiente superálgebra de Jordan. En efecto, en [20] se prueba el siguiente:

Teorema. Sea $J = \sum_{i \in Z} J_i$ una superálgebra de Jordan infinito dimensional simple graduada con las dimensiones de las componentes graduadas uniformemente acotadas. Entonces J es isomorfa a una superálgebra de uno de los cinco tipos siguientes:

1) Algebra loop

2) Superálgebra de una superforma $J = F1 + V$, ($V = V_{\bar{0}} + V_{\bar{1}}$, $V_{\bar{i}} = \sum_{n \in Z} V_{\bar{i}n}$, $\dim V_{\bar{i}} \leq d$).

3) Una superálgebra obtenida por el proceso de duplicación de Kantor a partir de un corchete de Jordan.

4) Superálgebra de Cartan (Existe $B \subseteq J$ con $B^- + [B^-, J^+] + [J^-, B^+] + B^+$ de codimension finita en $K(J)$.

5) Una superálgebra de Jordan de tipo Cheng-Kac $JCK(6)$ (cuya superálgebra de Lie asociada asociada por el proceso de Kantor-Koecher- Tits es $CK(6)$).

Como consecuencia del estudio de la especialidad de $JCK(6)$ se obtiene una nueva representación de las superálgebras de Lie $CK(6)$ como álgebra de matrices 8×8 sobre el álgebra de Weyl $W = < t^{-1}, t, \partial_t >$.

Álgebras de Lie simples finito dimensionales en característica p

No podemos terminar sin mencionar el estado de la clasificación de las álgebras de Lie simples finito-dimensionales en característica prima. Durante más de 30 años, se han producido contribuciones al tema de autores como Kostrikin, Shafarevich, Kac, Shue, Benkart, Gregory, Premet, Block, Osborn, Weisfeiler, Wilson, Strade ...

Kostrikin y Shafarevich conjeturaron en 1966 que sobre un cuerpo algebraicamente cerrado F, con car$F = p > 5$, un álgebra de Lie "restricted"simple finito dimensional es clásica ó tipo Cartan.

Un álgebra de Lie restricted L posee un operador "p-potencia"que posee las propiedades formales que se derivan del correspondiente operador para álgebras asociativas.

Las álgebras clásicas son análogas a las álgebras de Lie simples complejas de dimensión finita. Las de tipo Cartan se corresponden con cuatro familias infinitas: W, S, H, K (Witt, Especial, Hamiltoniana y Contacto) de álgebras de Lie complejas infinito dimensionales.

La conjetura fue probada por Block y Wilson (1988)

Posteriormente, se consideró la conjetura de Kostrikin y Shafarevich generalizada, en la que se eliminaba la condición "restricted"para incluir álgebras simples de tipo Cartan "twisted".

En 1991 Strade y Wilson anunciaron la clasificación, acorde con dicha conjetura, para $p > 7$. La publicación de dicha clasificación está distribuida en varios artículos, en los que se explica un programa que requiere el análisis de cuatro caso distintos.

Se espera la pronta aparición de la demostración final para dicha clasificación en característica 5 y 7. Ya se han conseguido significativos resultados parciales, pero las técnicas requeridas son distintas de las usadas cuando $p > 7$ y la complicación adicional no es desdeñable. Se cree que la conjetura de Kostrikin y Shafarevich generalizada seguirá siendo cierta para $p = 7$, pero no en el caso $p = 5$, ya que se conoce un contraejemplo, las álgebras de Melykian. No obstante, se espera que dichas álgebras sean el único contraejemplo. La situación no es tan clara para $p = 2, 3$. En estos casos se conocen muchos ejemplos de álgebras que no son clásicas ni tipo Cartan.

En lo anteriormente expuesto, se puede apreciar un notable semejanza entre la clasificación de las álgebras de Lie simples finito-dimensionales en característica p y la correspondiente a superálgebras de Lie simples finito-dimensionales en característica 0. También se aprecia en muchas ocasiones un paralelismo entre la situación finito-dimensional en característica p y la situación infinito dimensional en característica 0, lo que abre muchos interrogantes que merecen ser investigados. Podemos decir que los mencionados teoremas de clasificación, en vez de "cerrar una etapa", abren nuevos e interesantes problemas y plantean nuevos retos.

Referencias

[1] M. Artin and J.T. Stafford, Noncommutative graded domains with quadratic growth, *Invent. Math.* **122**,no.2, 231-276, (1995).

[2] G. Benkart, M. Osborn and H. Strade, Contributions to the classification of simple modular Lie algebras, *Trans. AMS* **341**,no.1, 227-252, (1994).

[3] G. M. Bergman, A note on growth functions of algebras and semigroups, University of California, Berkeley, (1978).

[4] R. E. Borcherds, Generalized Kac-Moody algebras, *Journal of Algebra* **115**(2), 501-512, (1988).

[5] R. E. Borcherds, The Monster Lie algebra, *Advances in Math.* **83**(1), 30-47, (1990).

[6] R. E. Borcherds, Monstrous Moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109**, 405-444, (1992).

[7] R. E. Borcherds, A characterization of generalized Kac-Moody algebras, *Journal of Algebra* **174**(3), 1073-1079,(1995).

[8] R. E. Borcherds, Modular moonshine III, *Duke Math. J.* **93** no.1, 129-154, (1998)

[9] S. J. Cheng and V. Kac, A New N=6 superconformal algebra, *Comm. Math. Phys.* **186**, (1997).

[10] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. London Math. Soc* **11**, 308-339, (1979).

[11] W. Feit and J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13**, 775-1029, (1963).

[12] B. Fischer, D. Livingstone, M. P. Thorne, The characteers of the ''Monster"simple groups, Birmingham (1978).

[13] I. B. Frenkel and V.G. Kac, Basic representations of affine algebras, *Invent. Math.* **62**, 99-120, (1980).

[14] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and J. Meurman, A natural representation of the Fischer-Gries Monster with the modular function J as character, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **81**, 3256-3260, (1984).

[15] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and J. Meurman, ''Vertex operator algebras and the Monster", Academic Press, (1988).

[16] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Inst. Hautes Etudies Sci. Publ. Math.* **53**, 53-73, (1981).

[17] V. G. Kac, Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth, *Math. USSR-Izvestija* 21271-1311, (1968).

[18] V.G. Kac, Lie Superalgebras, *Advances in Mathematics* **26**, 8-96, (1977).

[19] V.G. Kac, Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras, *Comm. in Algebra* **5** (13), 1375-1400, (1977).

[20] V.G. Kac, C. Martínez and E. Zelmanov, Graded simple Jordan superalgebras of growth one, *Memoirs of the AMS* **150**, 140pp.,(2001).

[21] I.L. Kantor, Connections between Poisson brackets and Jordan and Lie superalgebras, *Lie theory, differential equations and representation theory*, 213-225, Montreal (1989).

[22] I.L. Kantor, Jordan and Lie superalgebras defined by Poisson brackets,*Algebra and Analisis*, 55-79, 1989. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. (2)*, **151**, (1992).

[23] I. Kaplansky, Superalgebras,*Pacific J. of Math.* **86**, 93-98, (1980).

[24] A. I. Kostrikin, *Around Burnside*, Springer Verlag, (1990).

[25] J.W. van de Leur, A classification of contragredient Lie superalgebras of finite growth, *Communications in Algebra* **17**, 1815-1841, (1989).

[26] O. Mathieu, Classification of simple graded Lie algebras of finite growth, *Invent. Math.* **108**, 455-519, (1992).

[27] C. Martínez and E. Zelmanov, Jordan algebras of Gelfand-Kirillow dimension one, *J. of Algebra* **180**, 211-238, (1996)

[28] C. Martínez and E. Zelmanov, Simple and Prime graded Jordan Algebras, *J. of Algebra* **196**, 596-613, (1997).

[29] C. Martínez and E. Zelmanov, Simple finite dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic, *J. of Algebra* **236** no.2, 575-629, (2001).

[30] J. Milnor, Growth of finitely generated solvable groups, *J. Differential Geom.* **2**, 447-449, (1968).

[31] R.V. Moody, A new class of Lie algebras, *J. Algebra* **10**, 211-230, (1968).

[32] A. Premet and H. Strade, Simple Lie algebras of small characteristic I. Sandwich elements, *J. Algebra* **189**,n.2, 419-480, (1997).

[33] A. Premet and H. Strade, Simple Lie algebras of small characteristic II. Exceptional roots, *J. Algebra* **216**,n.1, 190-301, (1999).

[34] A. Premet and H. Strade, Simple Lie algebras of small characteristic III. The toral rank 2 case. *J. Algebra* **242**,n.1, 236-337, (2001).

[35] M. Racine and E. Zelmanov, Simple Jordan superalgebras, *Nonassociative Algebra and its Applications*, S. González ed., Kluwer Acad. Publish., 344-349, (1994).

[36] M. Racine and E. Zelmanov, Classification of simple Jordan superalgebras with semisimple even part, *to appear.*

[37] U. Ray, Generalized Kac-Moody algebras and some related topics, *Bull. of the AMS* **38** No. 1, 1-42, (2001).

[38] L. W. Small, J.T. Stafford and R. B. Warfield Jr., Affine algebras of Gelfand-Kirillow dimension one are PI, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **97**, 407-414, (1985).

[39] R. Solomon, A brief history of the classification of the finite simple groups, *Bull. of the AMS* **38**, No.3, 315-352, (2001).

[40] J. T. Stafford and M. Van den Bergh, Noncommutative curves and noncommutative surfaces, *Bull. of the AMS* **38**,No.2, 171-216, (2001).

[41] J. T. Stafford and J. J. Zhang, Examples in non-commutative projective geometry, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **116**,no.3, 415-433, (1994).

[42] H. Strade, New methods in the classification of simple modular Lie algebras, *Mat. Sb.* **181**,n.10, 1391-1402, (1990).

[43] H. Strade, The classification of the simple modular Lie algebras II. The toral structure, *J. Algebra* **151**,n.2, 425-475, (1992).

[44] H. Strade, The classification of the simple modular Lie algebras III. Solution of the classical case, *Ann. of Math. (2)* **133**,n.3, 577-604, (1991).

[45] H. Strade, The classification of the simple modular Lie algebras IV. Determining the associated graded algebra, *Ann. of Math. (2)* **138**,n.1, 1-59, (1993).

[46] H. Strade, The classification of the simple modular Lie algebras V. Algebras with Hamiltonian two-sections, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **64**, 167-202, (1994).

[47] H. Strade, The classification of the simple modular Lie algebras VI. Solving the final case, *Trans. Amer. Math. Soc* **350**, 2553-2628, (1998).

[48] H. Strade and R. L. Wilson, Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic. *Bull. Amer. Math. Soc* **24**,n.2, 357-362, (1991).

[49] J. Tits, Appendix to:"Groups of polynomial growth and expanding maps"by Gromov, *Inst. Hautes Etudies Sci. Publ. Math.* **53**, 74-78, (1981).

[50] C.T.C. Wall, Graded Brauer groups, *J. Reine Angew Math.* **213**, 187-199, (1964).

[51] E. Zelmanov, On some problems of Group Theory and Lie algebras, *Mat. Sb.* **180**, 159-167, (1989).

[52] E. Zelmanov, The solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent, *Izvestia Akad. Nauk. SSSR* **36**, 41-60, (1991).

[53] E. Zelmanov, The solution of the rstricted Burnside problem for 2-groups, *Mat. Sbornik* **182**, 568-592, (1991).

[54] E. Zelmanov, Semisimple finite dimensional Jordan superalgebras, *Lie Algebras, Rings and Related Topics*, Eds. Y. Fong, A.A. Mikhalev, E. Zelmanov, Springer-Verlag, Hong Kong, 227-243,(2000).