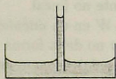


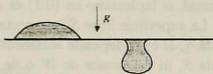
## Seis Propiedades Notables de Superficies Capilares

Robert Finn  
Mathematics Department  
Stanford University  
Stanford, CA 94305-2125, USA  
finn@math.stanford.edu

Físicamente, una superficie capilar es una interfaz entre dos fluidos adyacentes que no se mezclan. Ejemplos de esto son la interfaz entre aire y agua en un “tubo capilar” (Figura 0.1), la superficie exterior de una “gota líquida asentada” o la de una “gota colgante” en equilibrio estable sobre un plano horizontal (o debajo del mismo, según corresponda. Figura 0.2). El conflicto aparente en estos tres ejemplos con la afirmación intuitiva de que “el agua busca su propio nivel” tuvo importancia histórica en llamar la atención acerca de estos problemas y en el desarrollo de una teoría general.

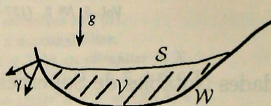


Tubo Capilar;  $\gamma < \frac{\pi}{2}$ .  
Figura 0.1



a) Gota suspendida; b) Gota colgante.  
Figura 0.2

Genéricamente, consideraremos un volumen  $V$  de líquido conexo, soportado sobre una superficie rígida  $W$  (Figura 0.3). Podemos ver que la forma de la interfaz libre  $S$  depende fuertemente de la forma de  $W$  (y eventualmente de su orientación en presencia de un campo gravitacional u otro campo  $g$ ). Sin embargo, es menos claro que la forma de  $S$  depende también fuertemente de los materiales que componen  $W$ .



Configuración general.

Figura 0.3

El trasfondo matemático de la mayoría de las teorías modernas se basa en los trabajos de Young en [1] y Laplace en [2], realizados a principios del siglo XIX, los cuales fueron unificados posteriormente por Gauss en [3], quien caracterizó dichas superficies como equilibrios de energía mecánica del sistema. Para esto utilizó el Principio de Trabajo Virtual, formulado por Johann Bernoulli en 1717. En lo que sigue adoptaremos esta formulación, aún cuando ciertas imprecisiones han sido señaladas en [4]. En notación moderna, la posición del vector  $x$  sobre la superficie libre  $S$  satisface

$$\Delta x = 2HN \quad (0.1)$$

Aquí,  $H$  es la *curvatura escalar media* de  $S$  (es decir, el promedio de dos curvaturas seccionales sobre planos ortogonales que comparten un vector normal con  $S$ ), y  $N$  es un vector unitario normal a  $S$ . El operador  $\Delta$  denota el *laplaciano intrínseco* de  $S$  (o sea, el laplaciano en la métrica de  $S$ , que es obtenido evaluando el laplaciano usual en coordenadas conformes y luego multiplicándolo por la razón de área local). Por ejemplo, sobre una esfera de radio  $R$ , se encuentra que  $H = 1/R$ , y que el laplaciano evaluado en el punto  $p$  se puede obtener como el laplaciano sobre el plano tangente en  $p$ , considerado como la proyección estereográfica desde el punto diametralmente opuesto. En general, el laplaciano en (0.1) es un operador altamente no lineal.

La superficie libre  $S$  intersecciona la superficie rígida  $W$  en un *ángulo de contacto*  $\gamma$ , el cual depende solamente de los materiales y no de la forma de  $W$  o la de  $S$ , ni del grosor de  $W$  o de la presencia (o ausencia) de campos (gravitacionales) externos. Por lo tanto, si todos los materiales son homogéneos, se tiene que

$$\gamma \equiv \text{const.} \quad (0.2)$$

El valor de  $\gamma$  está determinado por características físicas de los materiales. En la práctica, diferentes materiales presentan grandes variaciones en el valor de este parámetro. Sin embargo, desde el punto de vista matemático,  $\gamma$  es un valor prescrito, por lo tanto podemos considerar la normalización  $0 \leq \gamma \leq \pi$ .

Notemos que el vector de posición de cualquier superficie suave satisface (0.1). Las superficies capilares se distinguen por la particular forma de  $H$ ,

producto de las condiciones de capilaridad. En un campo gravitacional  $g$  (el cual puede anularse o ser negativo) podemos ver que

$$H(x) = \frac{\rho g}{\sigma} + \text{const.} \quad (0.3)$$

donde  $\rho$  es la variación de densidad a través de  $S$  y  $\sigma$  la tensión superficial. La constante en (0.3) está determinada por posibles restricciones de volumen. Nos enfrentamos al problema de encontrar una superficie con curvatura media prescrita, que esta acotada por paredes prescritas, en un ángulo  $\gamma$  también prescrito. En las siguientes secciones examinaremos el comportamiento de soluciones de este problema en diferentes contextos.

## 1 Propiedad 1. Desaparición Discontinua

Consideramos un tubo capilar con sección general  $\Omega$  en ausencia de gravedad. Este modelo podría resultar poco apropiado para el caso presentado en la figura 0.1, ya que si  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  el fluido escurriría hasta infinito, o se acumularía en el fondo del tubo cuando  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ . Por lo tanto, supondremos que el tubo ha sido removido del recipiente, cerrado al fondo, y que un volumen prescrito (finito) de fluido cubre la base agregada al fondo. Como en [5], puede demostrarse que cualquier superficie, solución de (0.1), acotada por una curva cerrada simple, que encierra las paredes laterales, se proyecta simplemente sobre la base, y por lo tanto, admite una representación de la forma  $z = u(x, y)$ . Podemos deducir de (0.1) que

$$\text{div } Tu = 2H \equiv \text{const.}, \quad Tu = \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \quad (1.4)$$

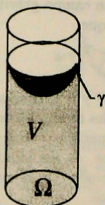
en  $\Omega$ , donde

$$\nu \cdot Tu = \cos \gamma \quad (1.5)$$

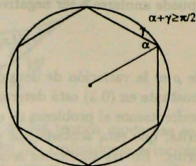
sobre  $\partial\Omega$ . Aquí  $\nu$  es la normal unitaria exterior.

Notemos que ahora buscamos superficies de curvatura media prescrita  $H$ .

En el caso particular en que  $\Omega$  es un disco, las ecuaciones (1.4) y (1.5) pueden resolverse explícitamente considerando un casquete esférico. La figura 1.1 ilustra el caso en que  $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ . En alguna medida, esta solución puede también aplicarse al caso en que  $\Omega$  es un polígono regular, ya que los planos verticales a través de sus lados cortan la esfera en ángulos constantes. Por ejemplo, si en la Figura 1.2 escogemos que el círculo circunscrito sea el círculo ecuatorial del hemisferio inferior de  $S : v(x, y)$ , entonces  $S$  será la solución del problema para  $\gamma$  tal que  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ .



Sección circular.  
Superficie de interfaz.  
Figura 1.1



Sección hexagonal;  
círculo ecuatorial del hemisferio inferior.  
Figura 1.2

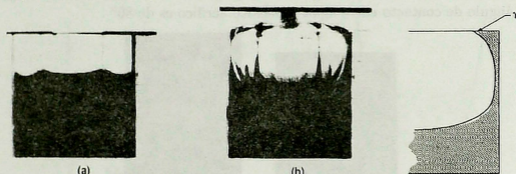
Los valores de  $\gamma$  que satisfacen  $\alpha + \gamma > \frac{\pi}{2}$  pueden obtenerse aumentando el radio del círculo. Sin embargo, este método no puede ser utilizado para  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , ya que el disco no cubriría completamente el dominio  $\Omega$ . Esta dificultad no es un accidente del procedimiento, sino que refleja una característica general del comportamiento local de las soluciones de (1.4) y (1.5) cerca de las esquinas. El siguiente resultado fue probado en [6].

**Teorema 1.1** Si  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , en cualquier esquina  $P$  con ángulo de apertura  $2\alpha$ , entonces no existe una vecindad de  $P$  en  $\Omega$  tal que una solución de (1.4) satisfaga (1.5) en la frontera de una vecindad puntuada de  $P$  en  $\Sigma$  (es decir, una vecindad excluyendo el punto  $P$ ).

En este teorema no se requieren condiciones de crecimiento en  $P$ . Puede probarse que si  $\alpha + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$ , entonces cualquier solución definida en una vecindad de  $P$  esta acotada en  $P$ . Mas aún, en algunos casos particulares (como el del polígono discutido anteriormente), siempre que  $\alpha + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$  existen soluciones. Es decir, pueden haber cambios de comportamiento discontinuos a medida que  $\gamma$  decrece a través de la marca divisoria  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ , donde una familia de soluciones uniformemente suaves y acotadas desaparece sin dejar rastro.

Este sorprendente y aparentemente extraño comportamiento fue puesto a prueba experimental por W. Masica en un *drop tower* de 132 metros en Glenn Laboratory de NASA en Cleveland, Ohio. Este dispositivo provee alrededor de cinco segundos de caída libre en el vacío, en efectiva ausencia de gravedad. Las figuras 1.5 a,b muestran dos recipientes cilíndricos idénticos (de sección hexagonal) después de aproximadamente un segundo de caída libre. Esta configuración no varió durante el resto de la caída. Los recipientes

estaban parcialmente llenos con mezclas de alcohol y agua de diferentes concentraciones, entregando datos en lados del punto crítico. En la Figura 1.3 a, tenemos que  $\alpha + \gamma > \frac{\pi}{2}$ , y puede observarse el casquete esférico que tiene por solución. En la figura 1.3 b, se da  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , aquí el fluido sube por las orillas y moja parte de la tapa del recipiente, formando una superficie de interfaz  $S$  que se dobla sobre sí misma y cubre dos veces algunas porciones de  $\Omega$ , mientras que las vecindades de los vértices de  $\Omega$  permanecen descubiertas (ver figura 1.4). Por lo tanto, como es de suponerse, existe una superficie física bajo estas condiciones; sin embargo, ésta no puede ser obtenida como solución de (1.4)-(1.5) sobre  $\Omega$ . Esta aparente paradoja de "no-existencia" se produce porque buscamos la superficie solución en el lugar incorrecto.



(a) Diferentes fluidos en cilindros hexagonales idénticos durante caída libre.

a)  $\alpha + \gamma > \frac{\pi}{2}$       b)  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$

Figura 1.3

Comportamiento de la interfaz en la esquina;

$\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ .

Figura 1.4

Enfaticemos nuevamente que el cambio de comportamiento es discontinuo respecto del parámetro  $\gamma$ . Si se quita la tapa del recipiente cuando  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , posiblemente el fluido se derramaría por las esquinas, hasta desaparecer completamente en el infinito.

En presencia de un campo gravitacional dirigido hacia abajo, las ecuaciones (1.4) y (1.5) deben remplazarse por

$$\operatorname{div} Tu = \kappa u + \text{const.} \quad (1.6)$$

en  $\Omega$ , con

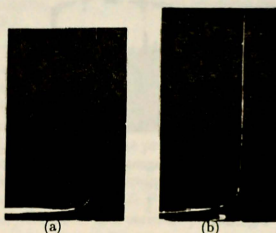
$$\nu \cdot Tu = \cos \gamma \quad (1.7)$$

sobre  $\partial\Omega$ , donde  $\kappa = \frac{\rho g}{\sigma}$ .

Nuevamente tendremos una variación discontinua en el mismo valor crítico de  $\gamma$ , aunque en este caso la solución seguirá existiendo a medida que  $\gamma$  cruza

el valor crítico. *Cualquier solución tal que  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$  es necesariamente no acotada en  $P$ , mientras que si  $\alpha + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$  todas las soluciones serán acotadas en una vecindad fija de  $P$ , independiente de  $\gamma$  en este rango.* Puede verse una discusión de esto en [7], capítulo 5.

Este resultado fue verificado experimentalmente por T. Coburn, quien formó un ángulo con dos placas de plástico acrílico, que se unían en una línea vertical. Luego depositó una gota de agua destilada en la base entre ellas. La figura 1.5 muestra el resultado de formar un ángulo dos grados más pequeño que el crítico. A la izquierda  $\alpha + \gamma \geq \frac{\pi}{2}$ , la altura máxima es ligeramente menor que la cota superior estimada. A la derecha  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ , el líquido sube hasta más de diez veces ese valor. Este experimento de Coburn estableció que el ángulo de contacto entre agua y plástico acrílico es de  $80^\circ$ .



Agua en cuña formadas por placas de plástico acrílico;  $g > 0$

a)  $\alpha + \gamma > \frac{\pi}{2}$

b)  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ .

Figura 1.5

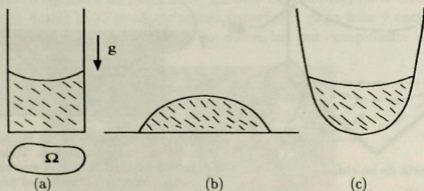
## 2 Propiedad 2: Unicidad y no-unicidad

Consideremos un volumen fijo  $V$  de líquido en un tubo capilar vertical, cerrado en la base  $\Omega$ , como en la figura 2.1 a . Sea  $\Sigma = \partial\Omega$  suave a trazos. Se puede demostrar lo siguiente (ver [7], capítulo 5):

**Teorema 2.1** *Sea  $\Sigma_0$  cualquier subconjunto de  $\Sigma$ , de medida de Hausdorff lineal cero. Entonces, si  $\kappa \geq 0$ , cualquier solución de (1.6) en  $\Omega$  que satisfice (1.7) en todos los puntos suaves de  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ , esta unicamente determinada por los valores en  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ .*

Notemos que si  $\kappa > 0$  la solución siempre existe, ver por ejemplo [8] [9]. Mientras que si  $\kappa = 0$  será necesario agregar nuevas condiciones para asegurar la existencia (ver la sección 4 a continuación).

En el Teorema 2.1, no se impone ninguna condición de crecimiento, sin embargo, los valores en cualquier subconjunto de medida de Hausdorff cero en la frontera puede ser ignorado al buscar la solución. Esta propiedad diferencia notablemente el comportamiento de las soluciones de (1.4)-(1.5) y (1.6)-(1.7) con respecto al de las funciones armónicas, para las cuales el relajar excesivamente las condiciones de crecimiento en la frontera, aún en un único punto, puede llevar a que no haya unicidad de la solución.



Configuraciones de apoyo

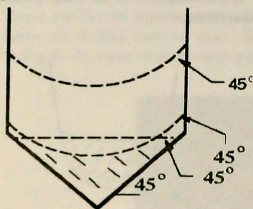
a) tubo capilar de sección general; b) placa horizontal; c) superficie convexa.

Figura 2.1

La unicidad ha sido establecida también para la gota asentada de la figura 2.1b. La demostración en [10] puede adaptarse a este caso de una forma diferente. En principio, parece natural esperar en estos caso particulares que la unicidad se mantendrá durante una deformación convexa del plano en un cilindro, como se señala en la figura 2.1c.

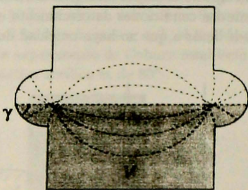
Por una buena razón todos los esfuerzos dedicados a completar este programa han sido infructuosos. Consideremos, como una posible configuración intermedia en este proceso, un cilindro vertical circular recto, cerrado al fondo por un cono circular de  $45^\circ$  (ver figura 2.2). Si llenamos el cono casi hasta el punto de unión con un fluido, cuyo ángulo de contacto con las paredes que lo rodean es de  $45^\circ$ , una superficie horizontal sería una solución particular de (0.1)-(0.2) con ese ángulo de contacto. Este también sería el caso en cualquier campo gravitacional vertical. Por otro lado, si agregamos una cantidad suficiente de fluido, este cubrirá el cono y la superficie de contacto estará dentro

del cilindro vertical. En este caso el fluido no puede estar horizontal en las paredes, debido al ángulo de contacto de  $45^\circ$ , por lo que se tendrá una interfaz curva, como en la figura. Es sabido que si  $g \geq 0$ , existe una interfaz simétrica, cuya línea de contacto es un círculo horizontal y la interfaz se mantiene completamente bajo este. Mientras el nivel de fluido se mantenga sobre la unión con el cono, el quitar o agregar fluido no cambiará la forma de la interfaz. Es claro que se puede quitar fluido hasta que el volumen prescrito se logre, y así obtenemos una segunda solución en este recipiente, como se indica en la figura.



Ausencia de unicidad.

Figura 2.2



Continuo de interfaces en un recipiente de forma extravagante;  $g = 0$ . Todas las interfaces tienen la misma superficie y energía interfacial, acotan el mismo volumen e intersectan al recipiente en el mismo ángulo  $\gamma = 80^\circ$ .

Figura 2.3

Esta construcción puede extenderse de un manera notable ([11] [12]):

**Teorema 2.2** *Existen recipientes con simetría rotacional que admiten un continuo de interfaces  $S$  en equilibrio con simetría rotacional, todas con la misma energía mecánica y volumen.*

Este resultado se tiene para cualquier campo gravitacional vertical  $g$ . El caso en que  $g = 0$  se ilustra en la figura 2.3. Algunos detalles físicos a considerar sobre la construcción se señalan en [4]; aún así, esto se mantiene estrictamente dentro de la formulación dada por Gauss.

Surge inmediatamente la pregunta de cuál interfaz se producirá si llenamos el recipiente con un volumen prescrito  $V$ . El siguiente resultado en [12], [13],[14] sugiere una respuesta:

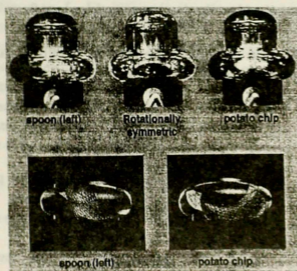
**Teorema 2.3** *Ninguna de las interfaces descritas por el Teorema 2.2 es mecánicamente estable, en el sentido que existen interfaces arbitrariamente cer-*



canas a miembros de esta familia, que acotan el mismo volumen y satisfacen las mismas condiciones de frontera, pero poseen una energía mecánica menor.

Estas otras interfaces son necesariamente asimétricas. Dado que se sabe, gracias a [15], que existe una superficie de energía mínima, la construcción nos proporciona un ejemplo de “rompimiento de simetría”, en el cual condiciones simétricas nos llevan a soluciones asimétricas.

Esto fue verificado computacionalmente por M. Callahan [16], quien estudió el caso  $g = 0$  y encontró un mínimo local (papa frita) y un posible mínimo absoluto (cuchara) (ver figura 2.4). Experimentalmente esto fue probado en un drop tower por M. Weislogel [17], quien observó la superficie “cuchara” durante los cinco segundos de caída libre. En otro experimento en la estación espacial Mir, S. Lucid logró producir ambas superficies, papa frita y cuchara. Sus observaciones son comparadas con las obtenidas por computador en la figura 2.4.



Rompimiento de simetría en recipiente exótico con  $g$  nulo. Abajo: cálculo del posible minimizador global (cuchara) y el minimizador local (papa frita).

Arriba: Experimento en Mir: Inserción simétrica de fluido (centro); cuchara (izquierda); papa frita (derecha).

Figura 2.4

### 3 Propiedad 3. Puente líquido inestable, con $g$ nulo

En los últimos años ha aparecido una apreciable cantidad de literatura relacionada con estabilidad de puentes líquidos uniendo placas paralelas en ausencia

de gravedad, como en la figura 3.1. La mayoría de estos trabajos asumen placas rígidas y estudian los efectos de la perturbación de la superficie libre, ver por ejemplo [19]-[24]. En términos generales, ha sido demostrado que los puentes estables en este sentido son superficies rotacionalmente simétricas únicamente determinadas, conocidas como catenoides, nodoides, o, en casos particulares, como cilindros o esferas. Correspondiente a dos ángulos de contacto,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , y a una distancia  $h$  de separación de las placas, existe un volumen crítico  $V_{cr}(\gamma_1, \gamma_2; h)$  tal que la configuración será inestable si  $V < V_{cr}$  y estable si  $V > V_{cr}$ .



Puente líquido uniendo placas paralelas;  $g = 0$ .

Figura 3.1

Recientemente ha sido estudiado el efecto de modificar la inclinación de las placas con algunos resultados inesperados.

**Teorema 3.1** *Si la configuración inicial no es esférica, el puente es siempre inestable con respecto a la oscilación de cualquiera de las placas, en el sentido que su forma puede cambiar discontinuamente con oscilaciones infinitesimales.*

Debe destacarse que un puente esférico que une placas paralelas es un fenómeno que ocurre solamente en circunstancias especiales. Una condición necesaria es que  $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi$ , para cada uno de estos ángulos de contacto existe exactamente un volumen que logra un puente esférico.

Un puente esférico puede variar continuamente con el movimiento de las placas; sin embargo, para puentes tubulares debe esperarse inestabilidad, en el sentido que pueden haber saltos discontinuos a diferentes configuraciones. Respecto a esto, se tiene el siguiente resultado:

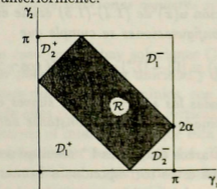
**Teorema 3.2** *Si  $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi$ , es posible un salto discontinuo desde un puente no esférico a uno esférico. Si  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \pi$  no puede obtenerse un puente tubular mediante oscilaciones infinitesimales. Más aún, excepto por comportamientos patológicos, no puede crearse una gota en la cuña formada por las placas.*

En el último caso es probable que el líquido desaparezca discontinuamente en el infinito. La expresión "gota en la cuña" se refiere a una masa conexas de fluido que contiene un segmento de la línea de intersección  $L$  de los planos, así

como subconjuntos abiertos de cada uno de los planos en su frontera, y cuya superficie exterior  $S$  es topológicamente un disco.

Un puente esférico de topología tubular puede existir en una cuña de apertura  $2\alpha$  si y solamente si  $\gamma_1 + \gamma_2 > \pi + 2\alpha$ . A diferencia del caso de placas paralelas, siempre que esta condición se cumpla podremos encontrar puentes esféricos de volumen arbitrario, manteniendo los mismos ángulos de contacto. McCuan demostró en [26] que si  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \pi + 2\alpha$ , entonces no existen puentes tubulares inmersos. Wente en [14] dio ejemplos de un puente tubular inmerso para el caso  $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\pi}{2}$ .

La normal unitaria de una superficie  $S$  de una gota en una cuña de apertura  $2\alpha$  puede ser continua respecto a  $L$  solamente si  $(\gamma_1, \gamma_2)$  está dentro del rectángulo cerrado  $R$  de la figura 3.2. Se demuestra en [28] que si  $(\gamma_1, \gamma_2)$  está en el interior de  $R$  entonces la interfaz  $S$  de cada una de estas gotas será métricamente esférica. Se conjetura en ese trabajo que no existen gotas con normal discontinua en  $L$ . En [25] se demuestra que esta conjetura no puede sostenerse (por consideraciones locales) en la "juntura" de la superficie con  $L$ ; de hecho existen superficies  $S$  que presentan un comportamiento localmente discontinuo. La conjetura afirma que ninguna de estas superficies es una gota en el sentido indicado anteriormente.



Dominio de datos que tendrá un vector normal continuo a una gota en cuña.

Figura 3.2

#### 4 Propiedad 4. Soluciones C-singulares

Como fue señalado anteriormente, durante la discusión de la propiedad 1 para tubos capilares de sección general  $\Omega$ , suaves a trazos, no siempre existen soluciones de las ecuaciones (1.4) y (1.5). Esto no es ocasionado por la existencia de esquinas agudas: puede no existir incluso para dominios analíticos convexos. Un criterio de existencia general se presenta en [7]:

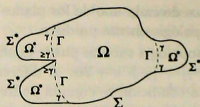
Configuración extrema para el funcional  $\Phi$ 

Figura 4.1

Refiriéndonos a la figura 4.1, consideramos todos los posible subdominios  $\Omega^* \neq \emptyset$  de  $\Omega$  que son acotados en  $\Sigma$  por subarcos  $\Sigma^* \subset \Sigma$  y en  $\Omega$  por subarcos  $\Gamma^*$  de semicírculos de radio  $|\Omega|/(|\Sigma| \cos \gamma)$ , satisfaciendo las propiedades:

- El vector de curvatura de cada  $\Gamma^*$  esta orientado hacia el exterior de  $\Omega^*$ , y
- Cada  $\Gamma^*$  intersecta  $\Sigma$  en puntos suaves de  $\Sigma$  en el ángulo  $\gamma$  medido dentro de  $\Omega^*$  o bien en puntos esquinas hacia dentro de  $\Sigma$ , en un ángulo no menor que  $\gamma$ .

Entonces tendremos que:

**Teorema 4.1** Una solución  $u(x)$  de (1.4)-(1.5) existe en  $\Omega$  si y solamente si para cada una de estas configuraciones se cumple que

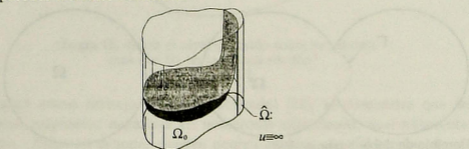
$$\Phi(\Omega^*; \gamma) \equiv |\Gamma^*| - |\Sigma^*| \cos \gamma + 2H \cos \gamma > 0 \quad (4.8)$$

donde  $2H = \frac{|\Sigma|}{|\Omega|} \cos \gamma$ . Todas las soluciones son suaves en el interior de  $\Omega$ , y estan únicamente determinadas, salvo una constante aditiva.

En este resultado, los arcos circulares  $\Gamma^*$  resultan ser extremales del funcional  $\Phi$ , en el sentido que estos corresponden a fronteras en  $\Omega$  de dominios extremales  $\Omega^*$ , que resultan del "problema variacional asociado" de minimizar  $\Phi$ . Notemos que siempre que la solución de (1.4)-(1.5) existe, entonces esto significa que la curvatura esta dada por  $2H|\Omega| = |\Sigma| \cos \gamma$ , y este es el valor  $H$  dado en (6.13). El siguiente resultado es demostrado en [29]:

**Teorema 4.2** Cuando no existe una solución suave de (1.4)-(1.5), existirá una solución  $U(x, y)$  sobre un subdominio  $\Omega_0$ , acotada dentro de  $\Omega$  por subarcos circulares,  $\Gamma_0$ , de semicírculos de radio  $\frac{1}{2}H_0$ , para algún  $H_0 \leq H$  positivo. Los arcos intersectan  $\Sigma$  en un ángulo  $\gamma$  o bien en puntos de esquinas hacia dentro de  $\Sigma$  con ángulos no menores que  $\gamma$ , como en la figura 4.1. Cuando los arcos  $\Gamma_0$  son aproximados desde dentro de  $\Omega_0$ ,  $U(x, y)$  se acerca asintóticamente en infinito a los cilindros verticales sobre estos arcos.

Nos referiremos a estas superficies  $U(x, y)$  como *soluciones cilíndricas singulares* o "soluciones C-singulares". Los subarcos son los extremales del funcional  $\Phi$ , correspondiente a  $H = H_0$  en (6.13). La figura 4.2 muestra este comportamiento. Estas soluciones pueden observarse experimentalmente con poca gravedad, como superficies subiendo a la tapa del recipiente, en vez de dirigirse a las paredes laterales verticales.

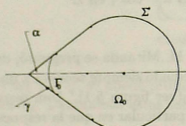


Superficie de interfaz para una solución C-singular.

Figura 4.2

**Teorema 4.3** *Las soluciones C-singulares pueden ser únicas o no, dependiendo de la geometría. Estas pueden coexistir con soluciones regulares, sin embargo pueden no existir donde soluciones regulares sí pueden ser encontradas.*

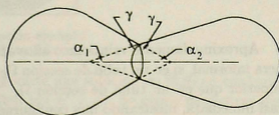
La figura 4.3 muestra un caso en que hay soluciones C-singulares para todo  $\gamma < \frac{\pi}{2} - \alpha$ . En este caso se puede demostrar unicidad y que no existen soluciones suaves. Si consideramos dos de estos dominios, con diferentes ángulos de apertura, reflejando uno de ellos respecto un eje vertical, superponiéndolos en sus puntas y luego eliminando el interior de lo que está dentro de la frontera exterior, obtenemos la configuración de la figura 4.4. En este caso dos soluciones C-singulares distintas pueden existir para el mismo  $\gamma$ , mientras que la existencia de una solución regular no es conocida.



Si  $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$  existe exactamente una solución C-singular, salvo una constante aditiva.

No existen soluciones regulares.

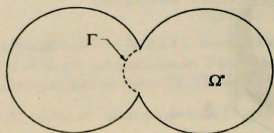
Figura 4.3



Existen al menos dos soluciones C-singulares.

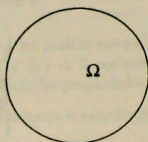
Figura 4.4

En la configuración de "burbuja doble" de la figura 4.5, si ambos radios son iguales y la apertura es suficientemente pequeña entonces existirán soluciones regulares y C-singulares. Finalmente, puede probarse en un dominio con forma de disco, como en la figura 4.6, que una solución regular existe para cualquier  $\gamma$ , pero no pueden haber soluciones C-singulares.



Dominio de doble burbuja. Para cualquier  $\gamma$  y aperturas suficientemente pequeñas, existen ambos tipos de solución, regular y C-singular.

Figura 4.5



En un disco, para cualquier  $\gamma$  existe una solución regular; sin embargo no existe solución C-singular

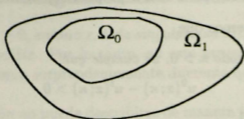
Figura 4.6

## 5 Propiedad 5. Inversión discontinua de relaciones de orden

Consideramos superficies de interfaz  $S$  en un tubo capilar como el de la figura 0.1, en un campo gravitacional apuntado hacia abajo y sin restricciones de volumen. Las relaciones que determinan el comportamiento se transforman en

$$\operatorname{div} u = \kappa u \text{ en } \Omega, \kappa > 0; \quad \nu \cdot Tu = \cos \gamma \text{ en } \Sigma \quad (5.9)$$

Aproximadamente veinticinco años atrás, M. Miranda se preguntó, de manera informal, si en un tubo de sección  $\Omega_0$  el líquido siempre se eleva a un nivel superior que en un tubo de sección  $\Omega_1 \supset \Omega_0$  (ver figura 5.1). Una respuesta casi inmediata, mostrando una configuración particular en que la respuesta es negativa, fue publicada en [30]. Algunas condiciones para una respuesta positiva fueron encontradas por D. Siegel en [31] (ver también [7], sección 5.3). Otra condición particular para un respuesta negativa puede encontrarse en [7], sección 5.4.

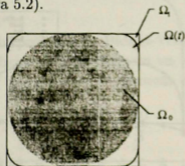


¿Logra  $\Omega_0$  elevar el nivel de fluido sobre su sección más que  $\Omega_1$  en la misma sección?

Figura 5.1

En un nuevo trabajo (aún no publicado) [32], se demuestra que deben esperarse respuestas negativas en numerosas situaciones, aparentemente ordinarias. Estas situaciones pueden ocurrir incluso con diferencias de altura arbitrariamente grandes. Más aún, las respuestas pueden cambiar de afirmativo a negativo discontinuamente al variar el dominio infinitesimalmente. Lo que es tal vez aún más notable, es que estas variaciones discontinuas ocurren para el cilindro circular, el cual es el corte transversal para el cual se espera mayor suavidad y estabilidad en el comportamiento.

Mostremos este posible comportamiento a través de un ejemplo específico. Sea  $\Omega_1$  un cuadrado de lado de largo 2, y sea  $\Omega_t$  el dominio obtenido al suavizar las esquinas de  $\Omega_1$  con arcos circulares de radio  $(1-t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Así,  $\Omega_0$  es el disco inscrito (ver figura 5.2).



Configuración ejemplo.

Figura 5.2

Para  $\gamma \geq \frac{\pi}{4}$ , se puede probar que existe una solución de (5.9) en cualquiera de los  $\Omega_t$ . Denotamos estas soluciones por  $u^t(x, \kappa)$ . Se puede demostrar que:

**Teorema 5.1** Existe  $C_0 > 0$  tal que para cada  $t$  satisfaciendo  $0 < t < 1$ , existe algún  $C(t)$  que cumple

$$u^1(x; \kappa) - u^t(x, \kappa) > \left( \frac{C(t)}{\kappa} \right) - C_0 \quad (5.10)$$

uniformemente sobre  $\Omega_t$ , para todo  $\kappa$  positivo suficientemente pequeño.

Por otro lado tenemos que

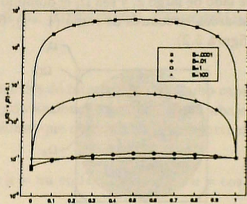
**Teorema 5.2** Para todo  $\kappa > 0$ , se cumple que

$$u^0(x; \kappa) - u^t(x; \kappa) > 0 \quad (5.11)$$

siempre que  $0 < t \leq 1$

Así, sin importar cuanto nos aproximemos el disco inscrito al disminuir de  $t$ , si  $\kappa$  es suficientemente pequeño la solución en el cuadrado dominará (por una cantidad arbitrariamente mayor) a la solución en  $\Omega_t$ . En cualquier caso, la solución del disco dominará a la del cuadrado, independientemente de  $\kappa$ . El comportamiento límite de  $u^1(x; \kappa) - u^t(x, \kappa)$  cuando  $\kappa \rightarrow 0$  es discontinuo en  $t = 0$

Este inesperado resultado fue verificado independientemente, mediante cálculos computacionales. La figura 5.3 muestra  $u_1 - u_t$  para  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ , evaluando en el punto de simetría  $x = (0, 0)$ , como función de  $t$  para cuatro valores (no dimensionales) diferentes del número de Bond  $B = \kappa a^2$ , donde  $a$  es un largo representativo. En este caso, escogemos  $a$  como el radio del círculo inscrito, es decir,  $B = \kappa$ .



$u^1(0; B) - u^t(0; B)$  como función de  $t$ ;  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ .

Notar valores negativos que minimizan cuando  $t = 0$ ,  
y grandes pendientes en los puntos extremos cuando  $B$  es pequeño.

Figura 5.3

Se puede ver que  $u_1 - u_t$  es siempre negativo, como se predijo, mientras que para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $u_1 - u_\varepsilon$  es arbitrariamente positivo con  $\kappa$  decreciente si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño. Notemos que la escala vertical en la figura es logarítmica, por lo tanto cada unidad de altura cambia correspondiendo a un factor de diez.



## 6 Propiedad 6. Singularidades aisladas

Se sabe de [33] que si  $\kappa \geq 0$ , entonces, toda singularidad aislada de una solución de (1.6)-(1.7) es removible. Por lo tanto, en este aspecto, las soluciones se comportan de una manera sorprendentemente diferente que las de ecuaciones lineales.

Si  $\kappa < 0$ , la situación no puede describirse de manera tan simple, de hecho Concus y Finn demostraron en [34] la existencia de una solución  $U(r)$  de la ecuación (obtenida a partir de (1.6) mediante normalización)

$$\operatorname{div} Tu = -u \quad (6.12)$$

con una singularidad aislada en el origen, y que además admite una expansión asintótica (divergente)

$$U(r) \approx -\frac{1}{r} + \frac{5}{3}r^3 - \frac{567}{8}r^7 + \frac{123149}{16}r^{11} - \frac{212466731}{128}r^{15} + \dots \quad (6.13)$$

Ellos postularon que:

- $U(r)$  es la única solución simétrica de (6.12) con una singularidad aislada no removible en el origen, y,
- $\delta = \infty$

Esta última conjetura fue probada por Bidaut-Veron en [35], quien también realizó importantes contribuciones a la primera en [36]. Ella demostró que cualquier solución singular que satisface la siguiente cota específica

$$\left| |u_r(r)| - \frac{1}{r^2} \right| < \frac{10}{3} \quad (6.14)$$

esta únicamente determinada.

La solución singular de  $U(r)$  está relacionada de una manera sorprendente con la gota líquida colgante, ilustrada en la figura 0.2. Concus y Finn demostraron en [37] que si permitimos que los vértices de la gota decrezcan en altura hasta infinito negativo, obtenemos una familia de soluciones, globalmente definidas, de las ecuaciones paramétricas asociadas. Estas exhiben una serie de formas, en el origen con forma similar a una burbuja a lo largo del eje vertical cerca del vértice, luego se suavizan, cruzando el eje horizontal, y continúan hacia infinito. En la figura 6.1 se comparan las figuras calculadas con  $U(r)$ . En base a estas observaciones, los autores postularon que las soluciones con



estables hasta e incluso sobrepasando el valor para el cual inicialmente aparece una inflexión en el perfil, pero son siempre inestables cuando se presenta una segunda inflexión. Así, los "perfiles-burbuja" descritos anteriormente, en general, alcanzan interfaces físicamente inestables cuando son consideradas globalmente. Aún así, todos los perfiles existen globalmente como curvas analíticas, que se extienden suavemente hasta infinito, asintóticamente al eje radial, y estan únicamente determinadas por  $u_0$ .

## 7 Comentarios

La presentación anterior se superpone con otros dos de mis artículos de difusión más recientes ([41] y [42]). Parte del material es común a los tres artículos, aunque la exposición es a partir de diferentes puntos de vista, y en cada uno de ellos puede encontrarse material no contenido en los otros dos. Los temas discutidos anteriormente fueron escogidos por su claridad al ser presentados, y con la intención de llamar la atención al fértil y aún inexplorado territorio matemático que se oculta tras la simple apariencia de las ecuaciones (0.1)-(0.2). Los temas escogidos en ningún caso cubren todos los descubrimientos que han aparecido en los últimos treinta años. Ha habido una gran e incesante actividad durante este periodo, demostrando la revitalización de un importante campo de estudio, que floreció durante la mayoría del siglo diecinueve, e incluso posteriormente, y luego sufrió el hiato de mitad de siglo. La lista de referencias a continuación, aunque no pretende ser completa, debiera ser una guía sobre las principales nuevas direcciones que han sido desarrolladas durante el actual resurgimiento.

## Referencias

- [1] **T. Young:** *An essay on the cohesion of fluids*. Philo.Soc. Trans. Roy. Soc. London 95 (1805)65-87
- [2] **P.S.Laplace:** *Traité de mécanique céleste :suppléments au Livre X*, 1805 y 1806, resp.in (Euvres Complete Vol. 4 Gauthier-Villars Paris. También versión traducida al inglés por N. Bowditch (1839), reimpreso por Chelsea, New York, 1966)
- [3] **C.F.Gauss:** *Principia Generalia Theoriae Figurae Fluidorum*. Comment. Soc. Regiae Scient. Gottingensis Rec. 7 (1830). Reimpreso como *Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand*

- des Gleichgewichtes* en Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, vol. 135, W. Engelmann, Leipzig, 1903.
- [4] R. Finn: *On the equations of capillarity*. J. Mathem. Fluid Mech., en impresión
- [5] T.I. Vogel: *Uniqueness for certain surfaces of prescribed mean curvature*. Pacific J. Math. 134 (1988) 197-207
- [6] P. Concus, R. Finn: *On capillary free surfaces in the absence of gravity*. Acta Math. 132 (1974), 177-198.
- [7] R. Finn: *Equilibrium Capillary Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1986. Russian translation (with Appendix by H.C. Wente) Mir Publishers, 1988.
- [8] M. Emmer: *Esistenza, unicità e regolarità nelle superfici de equilibrio nei capillari*. Ann. Univ. Ferrara 18 (1973), 79-94.
- [9] R. Finn, C. Gerhardt: *The internal sphere condition and the capillary problem*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 112 (1977), 13-31.
- [10] R. Finn: *The sessile liquid drop I: symmetric case*. Pacific J. Math. 88 (1980) 541-587.
- [11] R. Gulliver, S. Hildebrandt: *Boundary configurations spanning continua of minimal surfaces*. Manuscr. Math. 54 (1986) 323-347.
- [12] R. Finn: *Non uniqueness and uniqueness of capillary surfaces*. Manuscr. Math. 61 (1988) 347-372.
- [13] P. Concus, R. Finn: *Instability of certain capillary surfaces*. Manuscr. Math. 63 (1989) 209-213
- [14] H.C. Wente: *Stability analysis for exotic containers*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems (Waterloo, ON, 1997). Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 5 (1999) 151-158.
- [15] J.E. Taylor: *Boundary regularity for solutions to various capillarity and free boundary problems*. Comm. P.D.E. 2 (1977) 323-357.
- [16] M. Callahan, P. Concus, R. Finn: *Energy minimizing capillary surfaces for exotic containers (with accompanying videotape)*, in *Computing Optimal Geometries*. J. E. Taylor, ed., AMS Selected Lectures in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 13-15

- [17] **P. Concus, R. Finn, M. Weislogel:** *Drop tower experiments for capillary surfaces in an exotic container.* AIAA Journal, 30 (1992) 134-137
- [18] **P. Concus, R. Finn, M. Weislogel:** *Capillary surfaces in an exotic container; results from space experiments.* J. Fluid Mech. 394 (1999) 119-135
- [19] **M. Athanassenas:** *A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary.* J. Reine Angew. Math. 377 (1987) 97-107.
- [20] **T.I. Vogel:** *Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes II: general contact angles* SIAM J. Appl. Math. 49 (1989) 1009-1028.
- [21] **D. Langbein:** *Stability of liquid bridges between parallel plates.* Microgr. Sci. Techn. 1 (1992) 2-11.
- [22] **L.-M. Zhou:** *On stability of a catenoidal liquid bridge.* Pacific J. Math. 178 (1997) 185-198
- [23] **L.-M. Zhou:** *The stability of liquid bridges.* Dissertation, Stanford Univ., 1996.
- [24] **T.I. Vogel:** *Local energy minimality of capillary surfaces in the presence of symmetry.* Pacific J. Math., por aparecer.
- [25] **P. Concus, R. Finn, J. McCuan:** *Liquid Bridges, Edge Blobs, and Scherk-type Capillary Surfaces.* Indiana Univ. Math. J. , en impresión
- [26] **J. McCuan:** *Symmetry via spherical reflection and spanning drops in a wedge.* Pacific J. Math. 180 (1997) 291-324.
- [27] **H.C. Wente:** *Tubular capillary surfaces in a convex body.* Advances in geometric analysis and continuum mechanics (Stanford, CA, 1993), 288-298, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [28] **R. Finn, J. McCuan:** *Vertex theorems for capillary drops on support planes.* Math. Nachr. 209 (2000) 115-135
- [29] **R. Finn, R.W. Neel:** *C-singular solutions of the capillary problem.* J. reine angew. Math. 512 (1999) 1-25.

- [30] **P. Concus, R. Finn:** *On the height of a capillary surface.* Math. Z. 147 (1976) 93-95.
- [31] **D. Siegel:** *Height estimates for capillary surfaces.* Pacific J. Math. 88 (1980) 471-516.
- [32] **R. Finn, A.A. Kosmodem'yanskii, Jr.:** *Some unusual comparison theorems for capillary surfaces.* Pacific J. Math., por aparecer.
- [33] **R. Finn:** *On partial differential equations whose solutions admit no isolated singularities.* Scripta Math. 26 (1961) 107-115.
- [34] **P. Concus, R. Finn:** *A singular solution of the capillary equation I: existence.* Invent. Math. 29 (1975), 143-148.
- [35] **M.-F. Bidaut-Veron:** *Global existence and uniqueness results for singular solutions of the capillarity equation.* Pacific J. Math 125 (1986) 317-334.
- [36] **M.-F. Bidaut-Veron:** *Rotationally symmetric hypersurfaces with prescribed mean curvature.* Pacific J. Math. 173 (1996) 29-67.
- [37] **P. Concus, R. Finn:** *The shape of a pendent liquid drop.* Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A 292 (1979) 307-340.
- [38] **R. Finn:** *Green's identities and pendent liquid drops: I.* Intl. Symp. Univ. Ferrara; en *Developments in Partial Differential Equations and Applications in Mathematical Physics*, ed. G. Buttazzo, G.P. Galdi, L. Zanghirati. Plenum Press, London, 1992, 39-58.
- [39] **R. Nickolov:** *Uniqueness of the singular solution to the capillary equation.* Indiana Univ. Math. J., por aparecer.
- [40] **H.C. Wentz:** *The stability of the axially symmetric pendent drop.* Pacific J. Math. 88 (1980) 421-470.
- [41] **R. Finn:** *Capillary surface interfaces.* Notices Amer. Math. Soc. 46 (1999) 770-781.
- [42] **R. Finn:** *Some properties of capillary surfaces.* Rend. Sem. Mat. Milano, en impresión