

Symétries en Dimension Trois: Une Approche Quantique

Nafaa Chbili

Département de Mathématiques. Faculté des Sciences de Monastir
Bd de l'environnement, Monastir 5000 Tunisie
nafaa.chbili@esstt.rnu.tn

ABSTRACT

One of the most intriguing problems in topology is the question of whether a given manifold is symmetric, i.e. whether there is a finite cyclic group that acts on it. This question has its origins in a number of interrelated facts. The problem of group action has been subject of extensive literature, where different kinds of classical techniques have been used to shed some lights on this subject. The recent years have seen many new invariants introduced to low dimensional topology. The discovery of these invariants is considered as a revolution in the theory of knots and three-manifolds. The main goal of our research is to use this kind of invariants to study the problem of group action on 3-manifolds. In the case of knots and links we use the new invariants to find necessary conditions for a knot to be freely periodic. We apply our criteria successfully to the 84 knot with less than 9 crossings.

Let n be an integer and M a compact oriented 3-manifold, M is said to be n -periodic if the cyclic group of order n acts semi-freely on M with a circle as the set of fixed points. We study the quantum invariants ($Su(2)$ and $Su(3)$) of n -periodic manifolds (n is an odd prime) and show how these invariants reflect the periodicity of the considered manifold. The criteria we established enabled us to prove that the Poincaré sphere is not n -periodic for some values of n .

1 Introduction

Une question fondamentale en topologie est la suivante : Etant donnée une variété M et un groupe G , est-ce que G agit non trivialement sur M ? Cette question trouve ses origines dans d'autres domaines de la science et de la vie. En effet, cette question n'est autre que la formulation mathématique de la notion de symétrie. Une notion qui fascine et joue un rôle important dans de divers domaines. En topologie ce problème a fait l'objet d'une littérature abondante. La richesse et la complexité de la topologie en dimension trois donne plus d'importance à ce sujet. Des techniques classiques variées ont été utilisées pour explorer certains aspects du problème. Cependant plusieurs questions concernant les actions de groupes, même dans les cas les plus simples, restent à nos jours sans réponses. Au cours des deux dernières décennies sont apparues des techniques nouvelles en dimension trois. En 1984, Jones [27] a introduit un invariant de nœuds et entrelacs de S^3 qui a permis de résoudre plusieurs problèmes dont des questions ouvertes vieilles de plus d'un siècle. Cet invariant a été immédiatement généralisé en d'autres invariants du même genre pour les nœuds et entrelacs de S^3 . Ces découvertes ont été suivies quelques années plus tard d'un progrès semblable en théorie des variétés de dimension trois. A partir de la théorie quantique des champs topologiques, Witten [61] a montré l'existence d'une famille d'invariants topologiques des variétés compactes connexes orientées de dimension trois. Il revient ensuite à Reshitikhin et Turaev [51] de donner une construction mathématique de ces invariants en utilisant l'algèbre quantique $U_q(sl_2)$, d'où le nom invariants quantiques. Cette construction a été suivie d'une autre beaucoup plus élémentaire, due à Lickorish [36]. En effet ce dernier définit ces invariants en utilisant seulement la théorie skein associée au crochet de Kauffman, évalué en les racines $4p^{\text{ème}}$ de l'unité. Dans ce même esprit, l'invariant θ_p est introduit par Blanchet, Habbeager, Masbaum et Vogel, l'avantage de l'approche suivie par ces derniers [5] est qu'elle a permis de montrer qu'on peut étendre la définition des invariants de Lickorish en évaluant le crochet de Kauffman en les racines de l'unité d'ordre $2p$. La théorie skein a été utilisée ensuite par Ohtsuki et Yamada [45] pour définir l'invariant quantique $SU(3)$, puis par Yokota [60] et Blanchet [4] qui ont défini une théorie skein pour l'invariant $SU(N)$.

La question qu'on se pose dans ce travail est la suivante : Comment se comportent les invariants quantiques lorsque les variétés considérées (nœuds, entrelacs, tresses, 3-variétés) sont symétriques ? Autrement dit, jusqu'à quel point ces invariants sont-ils sensibles à la géométrie de la variété considérée ? Une réponse à cette question permettra non seulement d'avoir une idée sur les symétries de la variété en question, mais aussi de mesurer la sensibilité et la fidélité des invariants quantiques. Faut-il rappeler que ces invariants, dont on dispose de plusieurs façons pour les définir, manquent d'interprétation géométrique ? La première partie de ce travail s'intéresse au cas des symétries libres en dimension un (tresses, entrelacs). La deuxième partie traite le cas des 3-variétés périodiques (sur lesquelles un groupe cyclique fini agit semi-librement avec un cercle comme l'ensemble des points fixes).

2 Préliminaires

Ce paragraphe rappelle quelques notions de base concernant la théorie des nœuds. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [7] et [52]. Nous nous contenterons ici d'énoncer les définitions et les résultats principaux qui nous serviront par la suite pour la présentation de notre travail.

2.1 Entrelacs et isotopies

Dans le reste de ce papier, nous parlerons indifféremment d'entrelacs dans S^3 ou dans \mathbb{R}^3 .

Définition 2.1.1 (Entrelacs) Un entrelacs L de S^3 est une sous variété différentiable compacte sans bord de dimension 1 de la sphère S^3 . Un nœud est un entrelacs qui possède une seule composante connexe.

L'entrelacs L est dit en bande si pour tout $x \in L$ on donne un vecteur normal qui dépend de x d'une façon continue.

Définition 2.1.2 (Isotopie) On dit que deux entrelacs L_1 et L_2 sont isotopes si et seulement si il existe une famille d'applications f_t pour $t \in [0, 1]$ de $S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1$ dans S^3 telles que :

(i) L'application :

$$\begin{aligned} [0, 1] \times (S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1) &\longrightarrow S^3 \\ (t, x) &\longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

est différentiable.

(ii) $\forall t \in [0, 1]$, f_t est un plongement.

(iii) $Im f_0 = L_1$ et $Im f_1 = L_2$.

Définition 2.1.3 (Diagramme d'un entrelacs) On appelle diagramme d'un entrelacs L un graphe D_L qui est une projection de L contenue dans le plan telle que :

(i) Tout sommet est d'ordre 4.

(ii) Toute arête est différentiablement plongée dans le plan. Par chaque sommet passent quatre arêtes. Deux arêtes opposées sont considérées comme étant au dessus des deux autres.

Exemple

Figure 1.

Remarque 2.1.4 Reidemeister a montré [50] que l'étude des classes d'isotopies des entrelacs orientés se ramène à l'étude des diagrammes des entrelacs modulo la relation d'équivalence engendrée par les mouvements suivants (appelés mouvements de Reidemeister) :

De la même façon on peut démontrer que les classes d'isotopies des entrelacs en bandes correspondent aux diagrammes des entrelacs non orientés modulo les mouvements de Reidemeister de type II et III. Il existe aussi une version orientée des mouvements de Reidemeister, cette version correspond aux diagrammes orientés [34].

Figure 2.

Dans le reste de ce papier nous parlerons indifféremment d'entrelacs et de diagramme d'entrelacs.

Définition 2.1.5 (Image miroir) Soit L un entrelacs orienté. On appelle image miroir de L et on note $L!$ l'entrelacs image de L par une symétrie plane de \mathbb{R}^3 . Si D_L est un diagramme représentant L alors le diagramme $D_{L!}$ associé à $L!$ est obtenu à partir de D_L en inversant ses croisements.

Exemple

D_L

$D_{L!}$

Figure 3.

Définition 2.1.6 (Nœud singulier) On appelle nœud singulier, une application différentiable du cercle orienté S^1 dans \mathbb{R}^3 n'ayant ni point singulier ni point triple mais possédant (éventuelle-ment) des points doubles simples transverses.

Figure 4.

De la même façon que pour les nœuds classiques, on peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des nœuds singuliers. Cette relation est dite isotopie à sommets rigides.

2.2 Tresses et tangles

Nous notons par \mathbb{R}^2 le plan euclidien et par I l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier i on désigne par P_i le point de \mathbb{R}^2 de coordonnées $(i, 0)$ dans la base canonique. Notons par \mathcal{P}_n l'ensemble des points P_i pour i variant entre 1 et n .

Définition 2.2.1 (Tangle) Soit n un entier naturel non nul. Un n -tangle T est une sous variété de la bande $\mathbb{R}^2 \times I$ compacte de dimension 1 telle que le bord ∂T vérifie la condition suivante :

$$\partial T = \mathbb{R}^2 \times \{0, 1\} \cap T = \mathcal{P}_n \times \{0, 1\}.$$

Deux tangles T et T' sont isotopes s'il existe une isotopie de la bande $\mathbb{R}^2 \times I$ fixe sur le bord transformant T en T' .

Figure 5.

Définition 2.2.2 (Tresse) Une tresse b à n brins est un n -tangle tel que pour tout réel z le plan $\mathbb{R}^2 \times \{z\}$ coupe b exactement en n points distincts.

Figure 6.

Définition 2.2.3 (Produit de deux tangles) Soient T et T' deux n -tangles, on définit le produit TT' comme étant le n -tangle obtenu en plaçant les deux bandes $\mathbb{R}^2 \times I$ l'une au dessus de l'autre, celle contenant T au dessus (figure ci-dessous).

Figure 7.

Remarques.

- 1) *Il existe une définition un peu plus générale des tangles et des tresses. Dans cette définition les points P_i sont quelconques et ne correspondent pas forcément aux points $(i, 0)$ de \mathbb{R}^2 . Les deux définitions sont équivalentes. Dans les prochains paragraphes nous utilisons l'une ou l'autre selon le cas.*
- 2) *Soit T un n tangle. Il est possible de fermer T en connectant chaque point $P_i \times \{0\}$ au point $P_i \times \{1\}$ sans ajouter de croisements. On obtient de ce fait un entrelacs qu'on note \hat{T} .*

Figure 8.

La multiplication des tresses donnée par la définition précédente permet de définir une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'isotopies des tresses à n brins. Notons \mathcal{B}_n ce groupe, l'élément neutre de \mathcal{B}_n est la tresse triviale $1_{\mathcal{B}_n}$ (voir figure 9). Nous notons dans la suite par σ_i la tresse qui consiste à croiser les brins i et $i + 1$ de la façon illustrée par la figure suivante :

$$1_{\mathcal{B}_n} \qquad \qquad \qquad \sigma_i \qquad \qquad \qquad \sigma_i^{-1}$$

Figure 9.

Théorème 2.2.4 ([7]) *Le groupe de tresses \mathcal{B}_n admet la présentation suivante :*

$$\begin{aligned} \text{Générateurs : } & \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}. \\ \text{Relations : } & \mathbf{1) } \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}, \qquad (1 \leq j \leq n - 2). \\ & \mathbf{2) } \sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j, \qquad (1 \leq j < k - 1 \leq n - 2). \end{aligned}$$

Théorème 2.2.5 ([7]) *Soit n un entier ≥ 3 . Le centre du groupe \mathcal{B}_n est le sous groupe cyclique infini engendré par l'élément :*

$$\Omega_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n.$$

Dans la suite on désigne par \mathfrak{S}_n le groupe des bijections d'un ensemble de n éléments. Soit b une tresse de \mathcal{B}_n , il est clair qu'on peut associer à b d'une façon canonique un élément de \mathfrak{S}_n . Cet élément est appelé permutation induite par b et on le note par $i(b)$. La permutation induite par Ω_n est la permutation identité ; c'est à dire que : $i(\Omega_n) = 1_{\mathfrak{S}_n}$.

2.3 Tresses et Entrelacs

On a dit dans le paragraphe précédent qu'on peut obtenir un entrelacs en refermant une tresse. Alexander [1] montre que tout entrelacs peut être vu comme la fermeture d'une tresse. Quelques années plus tard, Markov considère la relation d'équivalence \equiv sur l'ensemble $\mathcal{B} = \prod_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$ engendrée par les deux opérations suivantes appelées mouvements de Markov :

$$\begin{array}{ll} \text{Mouvement de type I} & \forall \sigma \text{ et } \tau \in \mathcal{B}_n \quad \text{on a } \tau \sigma \tau^{-1} \equiv \sigma \\ \text{Mouvement de type II} & \forall \sigma \in \mathcal{B}_n \quad \text{on a } \sigma \equiv \sigma \sigma_n \equiv \sigma \sigma_n^{-1} \in \mathcal{B}_{n+1} \end{array}$$

et montre le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 ([38]) *Si α et β sont deux tresses telles que $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$ alors $\alpha \equiv \beta$; c'est à dire qu'on peut passer de α à β par une série de mouvements de types I, II et leurs inverses.*

Remarque 2.3.2 *Soit b une tresse de \mathcal{B}_n , alors \widehat{b} est un nœud si et seulement si la permutation $i(b)$ est un cycle de longueur n . Plus généralement le nombre de composantes de \widehat{b} est égal au nombre de cycles dans la décomposition de $i(b)$ en produit de cycles à supports disjoints [7].*

Définition 2.3.3 (Indice de tresse) Soit L un entrelacs, on appelle indice de tresse (braid index) de L le plus petit entier n tel qu'il existe une tresse $\alpha \in \mathcal{B}_n$ vérifiant $L = \widehat{\alpha}$.

2.4 Nœuds et entrelacs toriques

L'entrelacs torique de type (n, m) qu'on note $\mathcal{T}(n, m)$ est celui qu'on peut dessiner sur le tore $S^1 \times S^1$ en tournant n fois autour du méridien et m fois autour de la longitude [52]. Cette classe d'entrelacs joue un rôle très important dans notre travail. Nous rappelons dans ce paragraphe quelques propriétés de ces objets.

Remarque 2.4.1 *Soient n et m deux entiers tels que $n \in \mathbf{N}^*$. L'entrelacs torique $\mathcal{T}(n, m)$ est la fermeture de la tresse $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^m$.*

Exemple. Le nœud de trèfle est le nœud torique $\mathcal{T}(2, 3)$. Le nœud 5_1 est le nœud torique $\mathcal{T}(2, 5)$.

Remarque 2.4.2 *Le nombre de composantes de $\mathcal{T}(n, m)$ est égal à $\text{pgcd}(n, m)$, donc $\mathcal{T}(n, m)$ est un nœud si et seulement si n et m sont premiers entre eux.*

Les nœuds toriques sont classifiés par le théorème suivant [7] :

Théorème 2.4.3 *Soient a, b, a' et b' quatre entiers non nuls alors :*

- i) $\mathcal{T}(a, -b) = \mathcal{T}(a, b)$!
- ii) *Les deux nœuds toriques $\mathcal{T}(a, b)$ et $\mathcal{T}(a', b')$ sont isotopes si et seulement si (a', b') est égale à l'une des paires suivantes : (a, b) , $(-a, -b)$, (b, a) ou $(-b, -a)$.*

2.5 Les invariants polynômiaux

Dans ce paragraphe, nous rappelons les principaux invariants des entrelacs de S^3 . Sans donner de démonstrations nous énonçons quelques propriétés du polynôme de HOMFLY. Dans les prochains paragraphes nous introduisons d'autres invariants.

Définition 2.5.1 Une application de l'ensemble des diagrammes d'entrelacs orientés dans un anneau A qui est invariante par les mouvements de Reidemeister de type I , II et III est appelée invariant d'entrelacs orientés (on dit aussi invariant d'isotopie ambiante). Une application de l'ensemble des diagrammes d'entrelacs qui est invariante par les mouvements de Reidemeister de type II et III est appelée invariant d'entrelacs en bandes (on dit aussi invariant d'isotopie régulière).

Soit D un diagramme d'entrelacs orienté et x un croisement de D . On dit que x est un croisement mixte s'il appartient à deux composantes différentes de D . Sinon, on dit que x est un auto-croisement. A chaque croisement x de D on associe un nombre $\varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ de la façon suivante:

$$\varepsilon(\text{---}) = 1 \qquad \varepsilon(\text{---}) = -1$$

Définition 2.5.2 (Enlacement de deux composantes, enlacement total) Soit D le diagramme d'un entrelacs orienté à deux composantes L_1 et L_2 , on appelle enlacement de L_1 et L_2 le nombre entier :

$$\lambda(D) = \frac{1}{2} \sum_{\text{Croisements } x \text{ mixtes}} \varepsilon(x).$$

Soit L un entrelacs à n composantes L_1, L_2, \dots, L_n . On appelle enlacement total de l'entrelacs L l'entier :

$$\lambda(L) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j},$$

où $\lambda_{i,j}$ désigne l'enlacement des composantes L_i et L_j .

Définition 2.5.3 (Nombre algébrique de croisements) Pour tout entrelacs orienté L , posons $w(L) = \sum \varepsilon(x)$, où x parcourt l'ensemble des croisements de L . Le nombre $w(L)$ s'appelle nombre algébrique de croisements de L .

Remarque 2.5.4 L'application qui à tout entrelacs L associe $w(L)$ est un invariant d'isotopie régulière [29].

Notation : Soit L un entrelacs orienté, on note par L_+ , L_- et L_0 trois entrelacs qui sont identiques à L sauf au voisinage d'un croisement x , où ils sont comme l'illustre la figure suivante :

L_+ L_- L_0

Figure 10.

Le plus ancien des invariants des nœuds est le polynôme d'Alexander [1]. Ce polynôme a été défini en 1928 à partir du groupe fondamental du complémentaire du nœud dans S^3 . Il revient à Conway à la fin des années soixante de donner une définition purement combinatoire de cet invariant.

Théorème 2.5.5 (Polynôme d'Alexander-Conway) *Il existe un unique invariant Δ de l'ensemble des classes d'isotopie ambiante des entrelacs orientés dans l'anneau $\mathbf{Z}[t^{\pm 1/2}]$ tel que :*

- (i) $\Delta(\bigcirc) = 1,$
- (ii) $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0),$

où \bigcirc désigne le nœud trivial. Cet invariant est appelé polynôme d'Alexander (ou polynôme d'Alexander-Conway) et on note $\Delta_L(t) = \Delta(L)(t)$.

La théorie des nœuds a eu un renouveau considérable avec la découverte des nouveaux invariants. Le premier en date de ces récents invariants est le polynôme de Jones [27]. Ce polynôme est construit à partir des traces sur certaines algèbres de Von Neumann. Cet invariant a été immédiatement généralisé en un polynôme à deux variables appelé polynôme de HOMFLY [34], [28]. Nous introduisons par la suite ces invariants.

Théorème 2.5.6 (Polynôme de Jones) *Il existe un unique invariant V de l'ensemble des classes d'isotopie ambiante des entrelacs orientés dans l'anneau $\mathbf{Z}[t^{\pm 1/2}]$ tel que :*

- (i) $V(\bigcirc) = 1,$
- (ii) $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0),$

où large \bigcirc désigne le nœud trivial. Cet invariant est appelé polynôme de Jones et on note $V_L(t) = V(L)(t)$.

Théorème 2.5.7 (Polynôme de HOMFLY) *Il existe un unique invariant P de l'ensemble des classes d'isotopie ambiante des entrelacs orientés dans l'anneau $\mathbf{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ tel que :*

- (i) $P(\bigcirc) = 1,$
- (ii) $v^{-1}P(L_+) - vP(L_-) = zP(L_0),$

où \bigcirc désigne le nœud trivial. Cet invariant est appelé polynôme de HOMFLY et on note $P_L(v, z) = P(L)(v, z)$.

Nous listons par la suite quelques propriétés de l'invariant de HOMFLY. Pour des démonstrations détaillées de ces résultats voir [34].

Proposition 2.5.8 1- *Le polynôme de HOMFLY P_K généralise les invariants d'Alexander Δ_K et celui de Jones V_K . Plus précisément on a :*

$$\Delta_K(t) = P_K(1, t^{1/2} - t^{-1/2}) \quad \text{et} \quad V_K(t) = P_K(t, t^{1/2} - t^{-1/2}).$$

2- *Pour tout entrelacs L , on a :*

$$P_L(v, z) \in \mathbf{Z}[v^{\pm 1}, z, \frac{(v - v^{-1})}{z}].$$

Proposition 2.5.9 *Soit L un entrelacs à n composantes, le polynôme $P_L(v, z)$ peut se mettre sous la forme $\sum_{i \geq 1-n} P_{i,L}(v)z^i$, où $P_{i,L} \in \mathbf{Z}[v^{\pm 1}]$. De plus :*

Si n est un nombre pair alors $P_{i,L}(v)$ ne contient que des puissances impaires de v et $P_{i,L}(v) = 0$ pour les i paires.

Si n est un nombre impair alors $P_{i,L}(v)$ ne contient que des puissances paires de v et $P_{i,L}(v) = 0$ pour les i impaires. Par conséquent, si L est un nœud alors $P_L(v, z) = \sum_{i \geq 0} P_{2i,L}(v)z^{2i}$ avec $P_{2i,L}(v) \in \mathbf{Z}[v^{\pm 2}]$.

Dans le reste de cet article et pour tout entier k nous notons :

$$[k]! = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^k),$$

$$[\bar{k}] = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Rappelons le théorème suivant de Jones [28] :

Théorème 2.5.10 (Le polynôme de HOMFLY des nœuds toriques) *Pour le nœud torique $\mathcal{T}(n, m)$ on a :*

$$X_{\mathcal{T}(n,m)}(q, \lambda) = \frac{\lambda^{(n-1)(m-1)/2}}{[\bar{n}](1 - \lambda q)} \sum_{\substack{\gamma + \beta + 1 = n \\ \gamma \geq 0, \beta \geq 0}} (-1)^\beta \frac{q^{\frac{2\beta m + \gamma(\gamma+1)}{2}}}{[\gamma]![\beta]!} \prod_{i=-\gamma}^{\beta} (q^i - \lambda q).$$

Le polynôme de HOMFLY $P_K(v, z)$ se déduit du polynôme $X_K(q, \lambda)$ en faisant le changement de variables : $z = q^{1/2} - q^{-1/2}$, $v = (\lambda q)^{1/2}$.

3 Cas des noeuds et entrelacs de S^3

R. Fox [23] pose la question suivante : Quels sont les nœuds de S^3 qui peuvent être fixés par une transformation périodique φ de la sphère S^3 ? Selon le type de l'ensemble \mathcal{C} des points fixes de φ et la relation de cet ensemble avec le nœud K en question, Fox

distingue huit cas correspondant chacun à un type de symétrie bien déterminé. Dans le cas où \mathcal{C} est un cercle non noué, la solution positive de la conjecture de Smith [2] nous montre que φ est conjugué à une rotation et on dit dans ce cas que le nœud K est périodique. Si \mathcal{C} est vide, l'action que définit φ sur S^3 est libre et un nœud invariant par φ est dit nœud librement périodique. L'exemple standard de transformation librement périodique de période p sur $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ tel que } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ est donné par l'application lenticulaire $\varphi_{p,s}$ définie pour tout entier s premier avec p de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_{p,s} : \quad S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left(e^{\frac{2is\pi}{p}} z_1, e^{\frac{2is\pi}{p}} z_2 \right). \end{aligned}$$

Un entrelacs qui est invariant par $\varphi_{p,s}$ est dit entrelacs (p, s) -lenticulaire.

Dix ans après la publication de l'article de Fox, Murasugi (1971) montre que le polynôme d'Alexander [1] détecte la périodicité des nœuds d'une façon très nette. En effet, ce polynôme vérifie pour les nœuds périodiques une condition nécessaire simple et très pratique [40]. Ce résultat a marqué la relation qui existe entre la forme géométrique du nœud et le comportement de ses invariants. Murasugi démontre ce critère en utilisant des représentations particulières du groupe fondamental du complémentaire du nœud. Ce théorème a été redémontré par plusieurs auteurs et par des considérations différentes [8], [19], [24]. D'autres résultats concernant les nœuds périodiques et utilisant les outils de la théorie des nœuds classique ont été obtenus. Après la découverte des nouveaux invariants polynômiaux, Murasugi (1988) revient sur les nœuds périodiques pour démontrer, à l'aide du crochet de Kauffman [29], que le polynôme de Jones des nœuds périodiques vérifie une condition de congruence semblable à celle vérifiée par le polynôme d'Alexander [41]. Ce résultat inaugurerait une nouvelle ère dans la théorie des nœuds périodiques. Traczyk (1990) étudie le polynôme de HOMFLY de ces nœuds et montre que le premier coefficient de ce polynôme est d'une régularité surprenante [55], [56]. Yokota (1991) étend le critère de Traczyk aux autres coefficients de ce polynôme et établit une condition semblable pour le polynôme de Kauffman à deux variables [58], [59]. Przytycki (1992) traite le problème dans un cadre plus global. En effet, il adapte les techniques de Traczyk aux nœuds singuliers et établit un critère de périodicité en utilisant les invariants de Vassiliev-Gusarov [47].

Tout en s'inspirant des travaux de Murasugi, Hartley (1981) étudie le polynôme d'Alexander des nœuds librement périodiques et établit une condition de congruence permettant de détecter la libre périodicité d'une façon remarquable [23]. D'autres résultats concernant les nœuds librement périodiques sont démontrés. Flapan prouve dans [20] que les seuls nœuds admettant un nombre infini de périodes libres sont les nœuds toriques. Sakuma [54] montre qu'un nœud qui est à la fois amphichiral et hyperbolique ne peut être librement périodique.

Si les nouveaux invariants des nœuds périodiques ont fait l'objet d'une étude détaillée, la forme de ces invariants dans le cas des nœuds librement périodiques reste complètement mystérieuse. La forte régularité du polynôme de HOMFLY (par exemple) des nœuds périodiques nous incite à nous interroger si un phénomène du même genre se produit pour les nœuds librement périodiques ? Nous cherchons dans la suite

à caractériser les nœuds librement périodiques en utilisant les nouveaux invariants, en particulier les invariants de Vassiliev-Gusarov, les polynômes de HOMFLY et de Kauffman. La question qu'on se pose est la suivante : Soit K un nœud librement périodique de période p , est-ce que cette propriété géométrique impose des conditions algébriques sur les nouveaux invariants ? Nous focalisons notre étude sur les nœuds lenticulaires. Une vieille conjecture de géométrie en dimension trois montre que toute action libre du groupe $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur S^3 est conjuguée à une action lenticulaire. Ainsi, tout nœud p -librement périodique est conjugué à un nœud (p, s) -lenticulaire pour un certain entier s premier avec p . Cette conjecture est démontrée pour certaines valeurs de p , dont $p = 2$ et $p = 3$.

3.1 Entrelacs périodiques, entrelacs librement périodiques.

Définition 3.1.1 Soit p un entier ≥ 2 , un entrelacs K de S^3 est dit p -périodique s'il existe un homéomorphisme direct h de S^3 dans lui-même vérifiant :

- 1- L'ensemble des points fixes de h est un cercle non noué B .
- 2- Le nombre p est le plus petit entier tel que $h^p = Id$.
- 3- L'entrelacs K est disjoint de B .
- 4- L'entrelacs K est globalement invariant par h .

Remarques.

- 1- D'après la conjecture de Smith [2], un homéomorphisme h vérifiant les propriétés 1 et 2 de la définition précédente est conjugué à une rotation. Si nous considérons K comme un entrelacs de \mathbb{R}^3 , alors K est p -périodique si et seulement si il est invariant par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{p}$ autour d'une droite Δ .
- 2- Un entrelacs p -périodique L peut être représenté par un diagramme de \mathbb{R}^2 invariant par une rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{2\pi}{p}$.
- 3- Notons par $\langle h \rangle$ le groupe cyclique engendré par h . L'espace quotient de S^3 par $\langle h \rangle$ est homéomorphe à S^3 . Soit ψ la surjection canonique de S^3 dans $S^3_{/\langle h \rangle}$. Si K est un entrelacs invariant par h , nous notons par \bar{K} l'entrelacs $\psi(K)$. Comme le cercle B est invariant point par point sous l'action de h alors $\psi(B)$ est aussi un cercle non noué. En particulier, le nombre d'enlacement de K et B est le même que celui de \bar{K} et \bar{B} .

Proposition 3.1.2 ([37]) Soient K un nœud de S^3 et k le nombre d'enlacement de K avec l'axe de la rotation h . Alors le nombre de composantes de $\psi^{-1}(K)$ est égale à $\text{pgcd}(k, p)$. En particulier $\psi^{-1}(K)$ est un nœud si et seulement si p et k sont premiers entre eux.

Définition 3.1.3 Soit p un entier ≥ 2 , un entrelacs K de S^3 est dit p -librement périodique s'il existe un homéomorphisme direct h de S^3 dans lui-même vérifiant :

- 1- Pour tout $1 \leq i \leq p - 1$, h^i n'admet pas de points fixes.

2- $h^p = Id$.

3- $h(K) = K$.

Exemple : L'action lenticulaire.

Soit p un entier non nul. La sphère S^3 est considérée comme la sous variété réelle de l'espace complexe $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ définie par :

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \text{ tel que } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Considérons l'application $\varphi_{p,s}$ définie pour tout entier s premier avec p par :

$$\begin{aligned} \varphi_{p,s} : S^3 &\longrightarrow S^3 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto \left(e^{\frac{2is\pi}{p}} z_1, e^{\frac{2is\pi}{p}} z_2 \right). \end{aligned}$$

L'application $\varphi_{p,s}$ vérifie les deux premières conditions données par la définition précédente. L'espace quotient de S^3 par cette action est par définition l'espace lenticulaire $L(p, s)$. Comme cette action est libre alors la surjection canonique $\pi_{p,s}$ est un revêtement à p feuillets. Si K est un entrelacs de $L(p, s)$ alors $\pi_{p,s}^{-1}(K)$ est un entrelacs librement périodique de période p .

Définition 3.1.4 Soient p et s deux entiers premiers entre eux. Un entrelacs de S^3 qui est invariant par $\varphi_{p,s}$ est dit entrelacs (p, s) -lenticulaire.

L'importance de cette classe d'entrelacs vient de la conjecture suivante [53]:

Conjecture. *Soit p un nombre premier, alors pour toute action libre et directe du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur la sphère S^3 , il existe un entier s premier avec p tel que cette action est conjuguée à l'action définie par l'application $\varphi_{p,s}$.*

Par conséquent, tout entrelacs librement périodique est isotope à un entrelacs lenticulaire, ainsi on réduit l'étude des entrelacs p -librement périodiques à l'étude des entrelacs (p, s) -lenticulaires.

3.2 Une description combinatoire des entrelacs lenticulaires

La théorie skein propose de définir les invariants quantiques directement à partir des diagrammes des entrelacs dans le plan. Nous cherchons dans ce paragraphe à comprendre comment se traduit l'action lenticulaire sur les diagrammes. Autrement dit, étant donnée un entrelacs lenticulaire de S^3 , est-ce qu'on peut représenter cet entrelacs par un diagramme symétrique ? La caractérisation que nous obtenons représente l'étape clef dans notre étude des invariants quantiques des nœuds et entrelacs lenticulaires.

Le premier résultat de notre travail consiste à caractériser les diagrammes des entrelacs lenticulaires.

Théorème A. Soient p et s deux entiers tels que $\text{pgcd}(p, s) = 1$. Soit L un entrelacs de S^3 , alors L est (p, s) -lenticulaire si et seulement s'il existe un entier $m > 0$ et T un m -tangle tels que :

$$L = T^p(\widehat{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}})^{ms}.$$

La condition donnée par le théorème A généralise un résultat bien connu et facile à démontrer dans le cas des entrelacs périodiques (qui correspond au cas $s = 0$). Ce que nous obtenons dans le théorème A est beaucoup moins évident. La difficulté vient de ce que la variété quotient n'est plus la sphère S^3 , mais un espace lenticulaire. Autrement dit, il n'existe pas en général une surface de Seifert invariante par l'action lenticulaire. La démonstration de notre résultat repose essentiellement sur l'analyse de l'action lenticulaire sur le tore solide. Le théorème A permet de construire des exemples d'entrelacs lenticulaires. Cependant, il n'existe pas un algorithme pratique permettant de transformer un diagramme quelconque d'un entrelacs lenticulaire en un diagramme de la forme $T^p(\widehat{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{m-1}})^{ms}$.

Exemples

Les entrelacs toriques. L'entrelacs torique $\mathcal{T}(n, ns+p)$ est la fermeture de la tresse $(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1})^{ns+p}$, il se met alors sous la forme $T^p(\widehat{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}})^{ns}$ où T est la tresse $(\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1})$. Par conséquent, cet entrelacs est (p, s) -lenticulaire. En particulier :
 Le nœud 5_1 qui est le nœud torique $(2, 5)$ est $(3, 1)$ -lenticulaire.
 Le nœud 7_1 qui est le nœud torique $(2, 7)$ est $(3, 2)$ -lenticulaire.

Le nœud 10_{155} est $(2,1)$ -lenticulaire. Ce nœud est d'après Hartley [23] la fermeture de la tresse $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2(\sigma_1^{-3}\sigma_2)^2$, or $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$ est égale à la tresse $(\sigma_1\sigma_2)^3$ et par la suite :

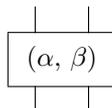
$$10_{155} = (\sigma_1^{-3}\widehat{\sigma_2})^2(\sigma_1\sigma_2)^3$$

Le nœud 9_{48} est $(3,1)$ -lenticulaire. Soit T le 2-tangle donné par la figure suivante :

Figure 11.

Conway [18] représente le nœud 9_{48} par le tangle $T^3\sigma_1^{-1}$. D'après [18] (paragraphe 3, page 333) ce dernier tangle est équivalent à $(T\sigma_1^{-1})^3\sigma_1^2$. On conclut alors que le nœud 9_{48} est $(3, 1)$ -lenticulaire.

Les entrelacs de Montesinos : L'entrelacs de Montesinos de type $m(e, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_p}{\beta_p})$ est un entrelacs admettant une projection comme dans la figure 12. Dans cette figure la boîte :



représente le tangle rationnel définie par la fraction rationnelle $\frac{\beta}{\alpha}$ (Une étude détaillée se trouve dans [7]).

Supposons que e est un nombre pair premier avec p . Le théorème A nous montre que l'entrelacs de Montesinos avec p tangles rationnels identiques $m(e, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \dots, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$ est un entrelacs $(p, \frac{e}{2})$ -lenticulaire.

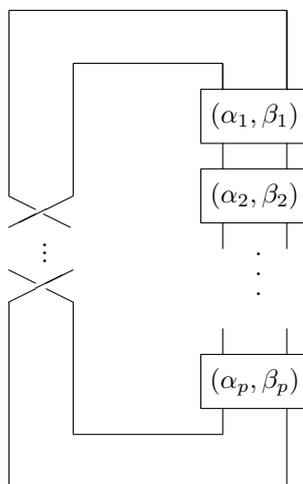


Figure 12: Entrelacs de Montesinos.

3.3 Généralisation des critères de Murasugi

Étant donnée un nœud périodique K , l'idée de Murasugi est d'établir le lien entre l'invariant de K et l'invariant du nœud quotient \overline{K} . Rappelons les deux résultats suivants de Murasugi.

Théorème 3.3.1 (Murasugi 1971). Soient p un nombre premier et K un nœud p -périodique. Notons par k le nombre d'enlacement de K avec l'axe de la rotation qui laisse invariant K et notons par \overline{K} le nœud quotient. Il existe un entier n tel que:

$$\Delta_K(t) \equiv (\Delta_{\overline{K}}(t))^p (1 + t + t^2 + \dots + t^{k-1})^{p-1} t^n \pmod{p}.$$

Théorème 3.3.2 (Murasugi 1988). Soient p un nombre premier et L un entrelacs p -périodique. Alors on a :

$$V_L(t) \equiv (V_{\overline{L}}(t))^p \quad \text{mod } \mathcal{J},$$

où \mathcal{J} est l'idéal de $\mathbf{Z}[t^{\pm 1/2}]$ engendré par p et $\xi_p(t) = \sum_{j=0}^{p-1} (-t)^j - t^{(p-1)/2}$.

Le crochet de Kauffman est un invariant d'isotopie régulière introduit par L. Kauffman dans [29]. Pour un entrelacs en bande L , le crochet de Kauffman est un polynôme de Laurent en une variable A . La découverte de cet invariant a permis à Kauffman de donner une autre définition au polynôme de Jones.

Théorème 3.3.3 (Kauffman, [29]) Il existe un unique invariant $\langle \rangle$ de l'ensemble de classes d'isotopie régulière des entrelacs non orientés dans l'anneau des polynômes à une variable $\mathbf{Z}[A^{\pm 1}]$ tel que :

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= A \langle L_0 \rangle + A^{-1} \langle L_\infty \rangle, \\ \langle \bigcirc \rangle &= 1, \end{aligned}$$

où \bigcirc désigne le nœud trivial, L , L_0 et L_∞ sont trois entrelacs identiques sauf au voisinage d'un croisement, où ils sont comme dans la figure 13.

Figure 13.

Avec ces notations Kauffman a démontré que le polynôme de Jones s'obtient facilement à partir du crochet. En effet, si on note par $w(L)$ le nombre algébrique de croisements de l'entrelacs L , on a la formule suivante :

$$V_L(t) = (-t^{3/4})^{w(L)} \langle L \rangle (t^{-1/4}).$$

Pour les entrelacs de l'espace lenticulaire, le polynôme de Jones n'est pas bien défini. Pour cette raison nous discutons le critère de Murasugi en termes de tangles. En effet, en étudiant la catégorie des tangles on établit la congruence suivante :

Théorème B. Soient s un entier, p un nombre premier et T un n -tangle. Alors on a :

$$\langle \widehat{T^p \Omega_n^s} \rangle (A) \equiv (\langle \widehat{T \Omega_n^s} \rangle (A))^p \quad \text{mod } \mathcal{I},$$

où \mathcal{I} est l'idéal de $\mathbf{Z}[A^{\pm 1}]$ engendré par p , $\delta^p - \delta$ et les éléments de la forme : $(\langle \widehat{\Omega_{n-2i}^s} \rangle)^p - (\langle \widehat{\Omega_{n-2i}^s} \rangle)$, pour $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

L'étude des traces des représentations du groupe de tresses dans l'algèbre de Hecke permet d'établir des formules explicites pour les générateurs du module \mathcal{I} . Remarquons que si on restreint la congruence du théorème B au cas $s = 0$, nous retrouvons un résultat équivalent au théorème de Murasugi dont la démonstration d'origine utilise des techniques différentes de celles que nous utilisons ici.

Le polynôme d'Alexander des tresses lenticulaires.

Comme nous l'avons déjà signalé, le cas du polynôme d'Alexander des nœuds librement périodique a été traité par Hartley [23]. Nous nous intéressons ici à une question plus précise. En effet, nous cherchons à établir une condition nécessaire pour qu'un entrelacs soit obtenu comme la fermeture d'une tresse lenticulaire.

Définition 3.3.4 Soient p et s deux entiers. Une tresse β est dite (p, s) -lenticulaire s'il existe une tresse à n brins α telle que $\beta = \alpha^p \Omega_n^s$.

Il est facile de voir que la fermeture d'une tresse lenticulaire donne naissance à un entrelacs lenticulaire. Cependant, on ne sait pas si un entrelacs (p, s) -lenticulaire quelconque peut être obtenu comme la fermeture d'une tresse lenticulaire. Dans le cas des entrelacs périodiques, des conditions nécessaires pour qu'un entrelacs admette une représentation comme une tresse périodique sont obtenues dans [33]. Le polynôme d'Alexander à plusieurs variables est un invariant d'isotopie régulière d'entrelacs orientés. Il a été défini à partir des présentations du groupe fondamental du complémentaire de l'entrelacs dans la sphère S^3 . Si L est un entrelacs à k -composantes alors le polynôme d'Alexander à plusieurs variables qu'on note $\Delta_L(t_1, \dots, t_k)$ vit dans l'anneau $\mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_k^{\pm 1}]$. Remarquons que si on prend $t_1 = t_2 = \dots = t_k = t$ alors on retrouve le polynôme d'Alexander classique (modulo une normalisation). Dans un papier récent, Morton [39] a introduit une méthode pour associer à chaque tresse de \mathcal{B}_n une matrice à coefficients dans $\mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$. Ainsi, il a pu définir le polynôme d'Alexander à plusieurs variables à partir du groupe de tresses. Cette méthode est inspirée par la représentation de Burau à une variable. Une représentation (classique) qui est reliée au polynôme d'Alexander d'une façon très simple. Dans la suite de ce paragraphe, nous trouvons plus commode d'introduire l'invariant suivant :

$$\begin{cases} D_L = \Delta_L & \text{si } k > 1 \text{ et} \\ \Delta_L = (1 - t)D_L & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Théorème C. Soient p un nombre premier, $s \in \mathbf{N}$ et α une tresse pure à n brins. On a la congruence suivante modulo p

$$(1 - t_1 \dots t_n) D_{\alpha^p \Omega_n^s}(t_1, \dots, t_n) \equiv 1 + (t_1 \dots t_n)^s A_1^p(t_1, \dots, t_n) + \dots + (t_1 \dots t_n)^{(n-1)s} A_{n-1}^p(t_1, \dots, t_n)$$

où A_1, \dots, A_{n-1} sont des éléments de $\mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$.

Si on écrit la congruence donnée par le théorème C dans le cas $s = 0$, on obtient une conséquence du théorème de Murasugi concernant le polynôme d'Alexander des

entrelacs périodiques. La condition obtenue dans notre théorème n'est pas triviale. En effet, les polynômes A_i ne sont pas quelconques puisqu'ils sont reliés au polynôme de $\widehat{\alpha}^p$ par une relation de congruence.

3.4 Le cas du polynôme de HOMFLY

Soit K un nœud de S^3 . D'après [34], le polynôme de HOMFLY $P_K(v, z)$ s'écrit sous la forme $P_K(v, z) = \sum_{i \geq 0} P_{2i, K}(v) z^{2i}$, où $P_{2i, K}(v) \in \mathbf{Z}[v^{\pm 2i}]$. Nous discutons dans ce

paragraphe le comportement des polynômes P_0 et P_2 des nœuds librement périodiques. Rappelons que les travaux de Traczyk et Yokota ont montré que ces polynômes sont des témoins très précis de la périodicité des nœuds puisque cette symétrie est reflétée d'une façon très nette par ces polynômes.

Dans une première étape nous nous intéressons au premier coefficient du polynôme de HOMFLY. Soit p un nombre premier, nous notons par \mathbb{F}_p le corps cyclique à p éléments. Soient $\Lambda_{p, s}$ le $\mathbb{F}_p[v^{\pm 2p}]$ -module engendré par les polynômes $P_{0, K}$ où K parcourt l'ensemble des nœuds (p, s) -lenticulaires. Nous démontrons que ce module est engendré par les polynômes des nœuds toriques de type $\mathcal{T}(n, ns + p)$ pour p premier avec n . Dans le cas $s = \pm 1$, nous montrons que le module $\Lambda_{p, s}$ est de type fini et nous déterminons une famille finie de générateurs. Le calcul de ces générateurs est possible grâce à une formule de Jones [28]. Dans la suite nous notons par $P_{0, K}(v)_p$ la réduite modulo p du polynôme $P_{0, K}(v)$; c'est à dire que les coefficients de ce polynôme sont considérés dans le corps \mathbb{F}_p .

Théorème D. *Soient p un nombre premier $\neq 2$ et $s = \pm 1$. Si K est un nœud (p, s) -lenticulaire alors $P_{0, K}(v)_p \in \Lambda_{p, s}$, où $\Lambda_{p, s}$ est le $\mathbb{F}_p[v^{\pm 2p}]$ -module engendré par les polynômes $P_{0, \mathcal{T}(\beta, \beta s \pm p)}(v)_p$ pour $1 \leq \beta \leq p - 1$.*

Pour les petites valeurs de p , le critère donné par le théorème D prend une forme simple et explicite. En effet, il est facile dans ce cas de donner une formule explicite pour les générateurs en utilisant la formule de Jones pour le polynôme de HOMFLY des nœuds toriques. Dans les cas $p = 3$ et $p = 5$, la régularité du polynôme P_0 est surprenante comme l'illustre les deux corollaires suivants.

Corollaire D1. *Soit K un nœud 3-librement périodique. Alors on a :*

$$P_{0, K}(v)_3 \in \mathbb{F}_3[v^{\pm 6}].$$

Corollaire D2. *Soit K un nœud $(5, \pm 1)$ -lenticulaire, alors $P_{0, K}(v)_5 = \sum a_{2i} v^{2i}$ avec:*

$$a_{10k+4} = 2a_{10k+2} \text{ et } a_{10k+6} = 2a_{10k+8} \text{ pour tout entier } k.$$

Applications.

Pour illustrer le corollaire D1, nous considérons le nœud de trèfle 3_1 . Un calcul simple montre que le premier coefficient du polynôme de HOMFLY $P_{0, 3_1}(v) = 2v^2 - v^4$. Ce polynôme, à coefficients considérés modulo 3, n'appartient pas à $\mathbb{F}_3[v^{\pm 6}]$. Par

conséquent, le nœud de trèfle n'est pas 3-librement périodique.

Dans le tableau de [52], il y a 84 nœuds ayant un nombre de croisements inférieur à 9. En examinant les polynômes de HOMFLY de ces nœuds (voir les dernières pages de [34]), nous remarquons que 72 parmi ces nœuds ne vérifient pas la condition donnée par le corollaire D1. Ils ne sont pas donc 3-librement périodiques. Seuls les 12 nœuds suivants échappent à notre critère, c'est à dire que le corollaire reste indécis pour les nœuds donnés par la liste suivante :

$$5_1, 7_1, 8_2, 8_{10}, 8_{21}, 9_3, 9_6, 9_{26}, 9_{38}, 9_{41}, 9_{48}, 9_{49}.$$

Dans un certain sens, la condition donnée par le corollaire D2 est un peu plus large que celle obtenue pour les nœuds 3-librement périodiques. En effet parmi les 84 nœuds ayant un nombre de croisements inférieur à 9, le corollaire D2 exclut 60 nœuds et il reste indécis pour les 24 autres (voir tableau).

Bien que la condition obtenue dans le théorème précédent a permis de prouver que certains nœuds ne sont pas lenticulaires. Le problème de savoir si un nœud donné est lenticulaire est loin d'être résolu. D'où l'idée de considérer les autres coefficients du polynôme de HOMFLY afin d'établir d'autres conditions permettant de renforcer la condition donnée par le polynôme P_0 .

Soit L un entrelacs à k composantes. D'après [34], on sait que le polynôme P_{1-k} est relié aux polynômes P_0 des différentes composantes de L par une formule assez simple. Cette formule joue un rôle important dans la démonstration du théorème précédent puisque elle permet de traduire les relations skein sur les polynômes P_0 . Dans un papier récent [32], Kanenobu et Miyazawa ont réussi à démontrer une relation analogue entre le polynôme P_{3-k} de l'entrelacs L et les polynômes P_2 des composantes de L . Bien que cette relation est beaucoup plus compliquée que celle obtenue par Lickorich et Millet dans le cas P_0 , elle a motivé notre étude du polynôme P_2 des entrelacs lenticulaires. Ce qui nous a permis d'établir le critère donné par le théorème suivant:
Théorème E. Soient $p > 3$ un nombre premier et $s = \pm 1$. Si K est un nœud (p, s) -lenticulaire alors $P_{2,K}(v)_p \in \Gamma_{p,s}$, où $\Gamma_{p,s}$ est le $\mathbb{F}_p[v^{\pm 2p}]$ -module engendré par les polynômes $P_{2,\mathcal{T}(\beta, \beta s \pm p)}(v)_p$ pour $1 \leq \beta \leq p - 1$.

Dans le cas $p = 5$, les huit générateurs du module $\Gamma_{p,s}$ peuvent être calculés facilement à l'aide de la formule de Jones. On obtient le corollaire suivant:

Corollaire E1. Soient $s = \pm 1$ et K un nœud $(5, s)$ -lenticulaire. Alors $P_{2,K}(v)_5$ appartient au $\mathbb{F}_5[v^{\pm 10}]$ -module engendré par v^{s8} .

Applications. Les conditions obtenues dans les deux théorèmes précédents sont indépendantes, puisque il y a des nœuds qui vérifient la première sans vérifier la deuxième et vice versa. Nous avons expliqué qu'en utilisant le polynôme P_0 on a pu montrer que 60 parmi les 84 nœuds avec moins de 9 croisements ne sont pas $(5,1)$ -lenticulaires. Les 24 nœuds restants vérifient la condition donnée par le corollaire D2, donc on ne peut pas savoir s'ils admettent une symétrie lenticulaire. Si on applique la

condition donnée par le polynôme P_2 aux 84 nœuds avec moins de 9 croisements on peut exclure la possibilité d'être (5, 1)-lenticulaires à 80 nœuds. Ce qui montre que la condition E1 est plus efficace que la condition D2. Seul le nœud 8_{19} échappe aux deux critères en même temps. Dans le tableau suivant on utilise la mention D pour dire que le critère en question décide si le nœud n'est pas (5,1)-lenticulaire et la mention ND pour dire que le critère n'exclut pas la possibilité que le nœud soit (5,1)-lenticulaire. Nous référons à la condition donnée par corollaire D2 (respectivement corollaire E1) par critère P_0 (respectivement critère P_2).

Nœud	Critère P_0	Critère P_2	Nœud	Critère P_0	Critère P_2
3 ₁	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₈	<i>D</i>	<i>D</i>
4 ₁	<i>D</i>	<i>ND</i>	9 ₉	<i>ND</i>	<i>D</i>
5 ₁	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₀	<i>ND</i>	<i>D</i>
5 ₂	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₁	<i>D</i>	<i>D</i>
6 ₁	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₂	<i>D</i>	<i>D</i>
6 ₂	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₁₃	<i>ND</i>	<i>D</i>
6 ₃	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₄	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₁	<i>ND</i>	<i>ND</i>	9 ₁₅	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₂	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₆	<i>ND</i>	<i>D</i>
7 ₃	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₇	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₄	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₈	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₅	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₁₉	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₆	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₀	<i>D</i>	<i>D</i>
7 ₇	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₂₁	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₂	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₂	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₃	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₃	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₄	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₄	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₅	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₅	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₆	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₆	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₇	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₇	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₈	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₈	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₂₉	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₉	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₀	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₀	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₁	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₁₁	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₂	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₂	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₃	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₁₃	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₃₄	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₄	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₃₅	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₁₅	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₆	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₆	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₃₇	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₇	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₈	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₁₈	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₃₉	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₁₉	<i>ND</i>	<i>ND</i>	9 ₄₀	<i>ND</i>	<i>D</i>
8 ₂₀	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₄₁	<i>D</i>	<i>D</i>
8 ₂₁	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₄₂	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₁	<i>ND</i>	<i>ND</i>	9 ₄₃	<i>ND</i>	<i>D</i>
9 ₂	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₄₄	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₃	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₄₅	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₄	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₄₆	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₅	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₄₇	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₆	<i>ND</i>	<i>D</i>	9 ₄₈	<i>D</i>	<i>D</i>
9 ₇	<i>D</i>	<i>D</i>	9 ₄₉	<i>ND</i>	<i>D</i>

Remarque. *Les techniques que nous avons développées pour étudier le polynôme de HOMFLY des nœuds lenticulaires peuvent être adaptées aux invariants de Vassiliev. Autrement dit nous définissons "une version singulière" de notre théorie skein périodique. Ce qui nous a permis d'établir des relations de congruences entre les invariants de Vassiliev des nœuds lenticulaires et ceux des nœuds toriques. Si on restreint ces relations aux nœuds périodiques, nous obtenons des précisions sur le critère de Yokota concernant le polynôme de HOMFLY des nœuds périodiques [58].*

4 Cas des 3-variétés

Toutes les variétés de dimension trois considérées dans ce rapport sont compactes connexes sans bords et orientées.

4.1 Présentation par chirurgie des 3-variétés périodiques

Définition 4.1.1 Soient $r \geq 2$ un entier et M une variété de dimension trois. On dit que M est r -périodique si et seulement si le groupe $G = \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ agit sur M et l'ensemble des points fixes par l'action de G sur M est un cercle. On note par \overline{M} l'espace quotient.

L'exemple le plus simple est celui de la sphère S^3 munie de l'action de $G = \mathbf{Z}/r\mathbf{Z}$ définie comme suit:

$$g : S^3 \longrightarrow S^3 \\ (z_1, z_2) \longmapsto (z_1, e^{\frac{2i\pi}{r}} z_2).$$

Ainsi la sphère S^3 est r -périodique pour tout $r \geq 2$. La sphère d'homologie de Poincaré Σ est aussi r -périodique pour $r = 2, 3$ et 5 . On peut expliciter facilement cette périodicité en regardant Σ comme la variété de Brieskorn $\Sigma(2, 3, 5)$, qui peut être vue comme l'intersection de la surface complexe d'équation $z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0$ avec une sphère de dimension 5. Par exemple, Σ est 5-périodique, l'action est la suivante:

$$h : \Sigma(2, 3, 5) \longrightarrow \Sigma(2, 3, 5) \\ (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (z_1, z_2, e^{\frac{2i\pi}{5}} z_3).$$

L'ensemble des points fixes pour cette action est le nœud de trèfle 3_1 . Rappelons que si M est une sphère d'homologie rationnelle périodique, alors l'espace \overline{M} est aussi une sphère d'homologie rationnelle.

D'après les travaux de Lickorich et Wallace [35], toute 3-variété est obtenue à partir de la sphère S^3 par une opération topologique appelée chirurgie le long d'un entrelacs de S^3 . Un tel entrelacs sera appelé présentation par chirurgie de la variété M . Les mouvements de Kirby (ou Fenn-Rourke) permettent de relier deux présentations par chirurgie de la même variété. Goldsmith [22] a étudié les présentations par chirurgie des revêtements ramifiés au-dessus de la sphère de dimension 3 pour montrer qu'un

tel revêtement est obtenu par chirurgie le long d'un entrelacs périodique. Ce résultat a été généralisé récemment par Przytycki et Sokolov [49], nous rappelons par la suite ce résultat qui établit le lien entre entrelacs et variétés périodiques et qui joue un rôle crucial dans les démonstrations des nos principaux résultats concernant les variétés périodiques.

Définition 4.1.2 Soient $r \geq 2$ un entier et L un entrelacs r -périodique de S^3 . On dit que L est fortement r -périodique si et seulement si le nombre d'enlacement de chaque composante de L avec l'axe de la rotation est nul modulo r .

Théorème 4.1.3 [49]. Soient r un nombre premier et M une 3-variété. Alors M est r -périodique si et seulement si M s'obtient à partir de S^3 par chirurgie le long d'un entrelacs fortement r -périodique.

Exemple. L'entrelacs dans la figure suivante est fortement 5-périodique. Une chirurgie le long de cet entrelacs permet d'obtenir la sphère d'homologie de Poincaré. Ainsi on retrouve le fait que la sphère d'homologie de Poincaré est 5-périodique.

Figure 14.

Les critères obtenus dans le cas des invariants quantiques des nœuds périodiques représentent un élément essentiel qui a motivé ce travail. En effet, comme les 3-variétés périodiques sont obtenues par chirurgie le long d'entrelacs périodiques, il est tout à fait légitime de se demander si les résultats obtenus pour les entrelacs périodiques s'étendent aux 3-variétés. P. Gilmer [21] a étudié l'invariant $SO(3)$. Il a établi une certaine relation de congruence dans les cas des revêtements et des 3-variétés périodiques. Pendant la même période, d'une façon totalement indépendante et en utilisant des techniques complètement différentes, nous avons démontré une condition de congruence pour l'invariant $SU(2)$. Ainsi le résultat de Gilmer s'obtient comme un corollaire de notre condition donnée par le théorème F.

4.2 L'invariant $SU(2)$

Comme nous l'avons déjà signalé, il existe plusieurs façons pour définir cet invariant. La version que nous allons considérer dans ce rapport est celle introduite dans [5] et

dont nous rappelons brièvement la définition par la suite. Soient $p \geq 3$ un entier et Λ_p l'anneau $\mathbf{Z}[A^{\pm 1}]_{/\Phi_{2p}(A)}$; où $\Phi_{2p}(A)$ est le polynôme cyclotomique d'ordre $2p$. Soient \mathcal{K} l'ensemble des entrelacs du tore solide $S^1 \times B^2$ et $\Lambda_p[\mathcal{K}]$ le module libre engendré par \mathcal{K} . Le skein module de Kauffman de $S^1 \times B^2$ est défini comme étant le quotient de $\Lambda_p[\mathcal{K}]$ par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_1) : \quad & \bigcirc \cup \mathbf{L} = \delta L \\ (\mathcal{R}_2) : \quad & L = AL_0 + A^{-1}L_\infty, \end{aligned}$$

où $\delta = -A^2 - A^{-2}$, L , L_0 et L_∞ sont trois entrelacs qui sont identiques sauf au voisinage d'un croisement où ils sont comme dans la figure 13.

Il est facile de voir que B_p peut être muni d'une structure d'algèbre isomorphe à l'algèbre polynômiale $\Lambda_p[z]$, où z correspond à une bande axiale standard dans le tore $S^1 \times I \times I$. Pour tout réel d , on note par $[d]$ la partie entière de d . Dans B_p , on définit

l'élément $\Omega_p = \sum_{i=0}^{[(p-3)/2]} \langle e_i \rangle e_i$, où $(e_i)_i$ est définie par $e_0 = 1$, $e_1 = z$ et la relation de

récurrence $e_{i+1} = ze_i - e_{i-1}$. Rappelons qu'on a: $\langle e_i \rangle = (-1)^i \frac{A^{2(i+1)} - A^{-2(i+1)}}{A^2 - A^{-2}}$.

Soit L un entrelacs en bandes à m composantes. Le multi-crochet $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_L$ est une forme multilinéaire de $B_p \times B_p \times \dots \times B_p \rightarrow \Lambda_p$ définie sur les éléments de la base de façon que $\langle z^{i_1}, z^{i_2}, \dots, z^{i_m} \rangle_L$ est égale à L_{i_1, i_2, \dots, i_m} qui représente la classe d'isotopie dans B_p de l'entrelacs obtenu à partir de L en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ composante de L par i_j bandes parallèles à celle-ci situées dans un voisinage suffisamment petit. Dans la suite nous notons par t l'automorphisme de B_p induit par un twist positif du tore solide, par t^{-1} on notera l'automorphisme inverse. Enfin, par $b_+(L)$ (respectivement $b_-(L)$) nous désignons le nombre de valeurs propres positives (respectivement négatives) de la matrice d'enlacement de l'entrelacs en bandes L .

Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension trois. On sait que M s'obtient à partir de la sphère S^3 par chirurgie le long d'un entrelacs en bandes L . L'invariant $\theta_p(M)$ est défini par la formule suivante:

$$\theta_p(M) = \frac{\langle \Omega_p, \dots, \Omega_p \rangle_L}{\langle t(\Omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\Omega_p) \rangle^{b_-(L)}}.$$

Notons que l'invariant $\theta_p(M)$ prend ses valeurs dans $\Lambda_p[\frac{1}{p}]$. Cependant, si r est premier avec p alors p est inversible dans $\mathbf{Z}_{/r\mathbf{Z}}$ et par la suite si on considère B_p à coefficients dans $\mathbf{Z}_{/r\mathbf{Z}}[A^{\pm 1}]_{/\Phi_p(A)}$, alors $\theta_p(M)$ peut être vu comme un polynôme en A à coefficients dans $\mathbf{Z}_{/r\mathbf{Z}}$.

Théorème F. Soient r un nombre premier impair et M une sphère d'homologie rationnelle de dimension trois. Si M est r -périodique alors pour tout entier $p \geq 3$ premier avec r on a:

$$\theta_p(M) \equiv (\theta_p(\overline{M}))^r (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha, \text{ mod } r, \delta^r - \delta,$$

où $\delta = -A^2 - A^{-2}$ et α est un entier.

Corollaire F1. Soient r un nombre premier impair et M une sphère d'homologie rationnelle de dimension trois. Supposons que M est r -périodique, alors pour tout $p \geq 3$ tel que $r \equiv \pm 1 \pmod p$, il existe un entier α tel que:

$$\theta_p(M) \equiv (\theta_p(\overline{M}))^r (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha, \pmod r.$$

Corollaire F2. Soient r un nombre premier impair et M le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 . Alors pour tout $p \geq 3$ tel que $r \equiv \pm 1 \pmod p$, il existe un entier α tel que:

$$\theta_p(M) \equiv (-A^{-6-p(p-1)/2})^\alpha, \pmod r.$$

Applications.

L'exemple suivant explique comment appliquer le corollaire F2 pour étudier les symétries de la sphère de Poincaré Σ . Le polynôme cyclotomique d'ordre 10 est $\Phi_{10}(A) = A^4 - A^3 + A^2 - A + 1$. L'invariant θ_5 , à coefficients considérés modulo r , prend alors ses valeurs dans l'anneau $\mathbf{Z}/r\mathbf{Z}[A^{\pm 1}]_{/A^4 - A^3 + A^2 - A + 1}$. L'élément Ω_5 est formé seulement de deux termes. En effet :

$$\Omega_5 = 1 + (-A^2 - A^{-2})z.$$

En utilisant les propriétés élémentaires des sommes de Gauss, on peut montrer que

$$\theta_5(\Sigma) = 1 - 2A + A^2 + A^3.$$

Soit r un nombre premier tel que $r \equiv \pm 1 \pmod 5$. Supposons que Σ est le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 . Alors on aura d'après le corollaire F2, $\theta_5(\Sigma) = (-A^{-16})^\alpha \pmod r$, pour un certain entier α . Rappelons que A est une racine primitive de l'unité d'ordre 10. Par conséquent les valeurs possibles des puissances de A sont $\pm A, \pm A^2, \pm A^3$ et $\pm A^4 = \pm(A^3 - A^2 + A - 1)$. On peut voir facilement que $\theta_5(\Sigma)$ n'est pas une puissance de A . Ce qui permet de conclure que Σ n'est pas le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 , pour tout r congru à 1 ou -1 modulo 5. En particulier pour $r = 11, 19$ et 29.

Remarques. 1-) La condition donnée par le théorème F est nécessaire. Cependant, il est difficile de voir s'il s'agit d'une condition suffisante. La difficulté vient essentiellement du fait qu'on ne dispose pas, même dans le cas des sphères d'homologie les plus simples, de formules calculant les invariants θ_p pour tout $p \geq 3$. Il est à noter aussi que le théorème F introduit une infinité de formules (pour tout p premier avec r). Tout ce qu'on peut affirmer est que si la condition du corollaire F2 est vérifiée pour une seule valeur de p , alors elle est insuffisante. Un contre exemple est facile à construire. En effet, prenons $p = 4$ et $r = 11$. Comme $\theta_4(\Sigma) = 1$, alors la congruence donnée par le corollaire F2 est vérifiée. Cependant, Σ n'est pas le revêtement cyclique régulier à 11 feuillets ramifié au-dessus de S^3 , comme on vient de le prouver.

2-) Pour certaines valeurs de p la condition donnée par le théorème F devient triviale. Des considérations élémentaires en théorie des nombres montrent que les seuls cas intéressants dans la formule donnée par ce théorème sont les cas où $r \equiv \pm 1 \pmod p$. Puisque si on n'a pas cette relation entre p et r alors l'idéal engendré par r et $\delta^r - \delta$ est égal à $\Lambda_p[\frac{1}{p}]$.

4.3 L'invariant SU(3)

Ohtsuki et Yamada [45] ont montré que la théorie skein introduite par Kuperberg [31] pour les entrelacs peut servir pour construire l'invariant quantique SU(3). Nous rappelons brièvement cette théorie skein ainsi que la définition de l'invariant SU(3). Soit F une surface orientée. Tous les graphes considérés dans la suite sont trivalents et orientés. De plus, nous supposons qu'à chaque sommet les trois arêtes sont orientées de la même façon (voir la figure 15). Un diagramme dans la surface F est localement le diagramme d'un entrelacs ou un graphe trivalent. Les diagrammes sont considérés

modulo isotopie. Dans la suite et pour tout entier k , nous posons $[k] = \frac{q^{\frac{k}{2}} - q^{-\frac{k}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}$.

Les relations skein suivantes ont été introduites par Kuperberg.

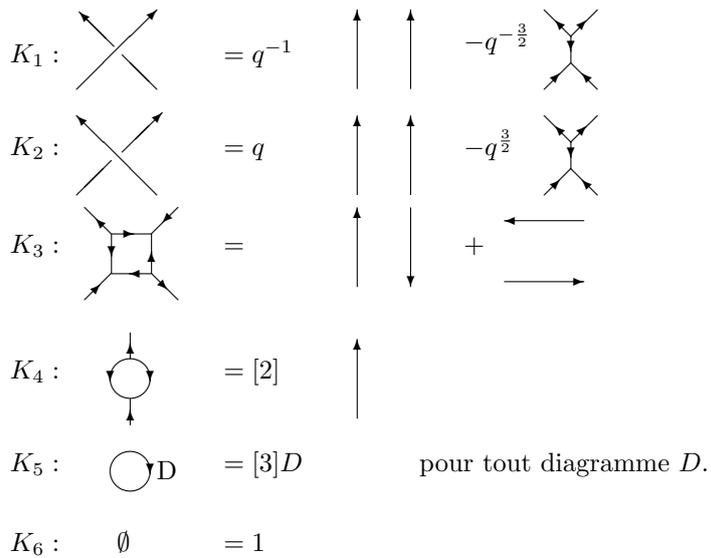


Figure 15.

A l'aide de ces relations, Kuperberg a défini un invariant de nœuds et entrelacs de S^3 . Cet invariant est en fait une spécialisation du polynôme de HOMFLY et peut être défini uniquement par les relations suivantes:

- (i) $J_{\circlearrowleft}(q) = 1,$
- (ii) $q^{\frac{3}{2}}J_{L_+}(q) - q^{-\frac{3}{2}}J_{L_-}(q) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})J_{L_0}(q),$

où L_+ , L_- et L_0 sont comme dans la figure 10. Le skein module $\mathcal{S}(F)$ est défini comme étant le Λ_r -module libre engendré par les diagrammes de F , quotienté par les relations de Kuperberg. Ohtsuki et Yamada ont montré que le skein module de $S^1 \times I$ admet une structure d'algèbre isomorphe à l'algèbre polynomiale $\Lambda_r[x, y]$, où x et y sont comme dans la figure suivante:



Figure 16.

En étudiant la théorie skein de Kuperberg, nous donnons une généralisation au critère de Murasugi pour les nœuds périodiques. Plus précisément nous démontrons le résultat suivant:

Théorème G. Soient r un nombre premier et L un entrelacs r -périodique. Alors on a la congruence suivante:

$$J(L) \equiv (J(\bar{L}))^r \text{ modulo } r, [3]^r - [3].$$

Inspirés par la démonstration de ce théorème, Przytycki et Sikora [48] ont obtenu une généralisation de ce résultat, étendant le théorème au cas des invariants quantiques $SU(N)$, pour N impair.

Pour introduire l'invariant $SU(3)$ des 3-variétés, nous trouvons plus commode de faire le changement de variable $q = A^6$, dans les relations skein de Kuperberg. Soit $p \geq 4$, nous définissons l'élément ω_p de $\mathcal{S}(S^1 \times I)$ par la formule suivante:

$$\sum_{n+m \leq p-3, n, m \geq 0} [n+1][m+1][n+m+2]P_{n,m}.$$

Soit $L = l_1 \cup l_2 \cup \dots \cup l_m$ un entrelacs à m -composantes. On note par $L_{(i_1, i'_1), \dots, (i_k, i'_k)}$ l'entrelacs obtenu à partir de L en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ composante de L par la réunion de i_j bandes (positives) et i'_j bandes (négatives) parallèles à celle-ci situées dans un voisinage suffisamment petit. D'une manière analogue au cas de l'invariant $SU(2)$ on définit le multi-crochet dans le cas $SU(3)$ comme étant la forme multi-linéaire $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_L$ de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \dots \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Z}[A^{\pm 1}]$ dont les valeurs sur les générateurs sont données par:

$$\langle x^{i_1} y^{i'_1}, \dots, x^{i_k} y^{i'_k} \rangle_L = J(L_{(i_1, i'_1), \dots, (i_k, i'_k)}).$$

En reprenant les notations du paragraphe précédent on définit l'invariant suivant:

$$\mathcal{I}_p(M) = \frac{\langle \omega_p, \dots, \omega_p \rangle_L}{\langle t(\omega_p) \rangle^{b_+(L)} \langle t^{-1}(\omega_p) \rangle^{b_-(L)}}.$$

Cet invariant est défini en les racines primitives de l'unité d'ordre $3p$. En se basant sur le fait que les termes $\langle t(\omega_p) \rangle$ et $\langle t^{-1}(\omega_p) \rangle$ sont conjugués comme nombres complexes, nous montrons que \mathcal{I}_p peut être considéré comme un élément de $\Lambda_p[\frac{1}{3p}]$ où Λ_p est l'anneau $\mathbf{Z}[A^{\pm 1}]_{/\Phi_{3p}(A)}$; ici $\Phi_{3p}(A)$ désigne le polynôme cyclotomique d'ordre $3p$. En étudiant le comportement du multi-crochet, nous avons pu montrer que le critère que nous avons établi pour les entrelacs périodique (théorème G) se généralise aux entrelacs fortement périodiques. Cette congruence représente l'étape clef dans la démonstration de notre critère de périodicité pour les invariants \mathcal{I}_p . Avant d'énoncer ce résultat nous considérons l'élément suivant:

$$G_p(A) = A^{-36} \frac{\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^{6k^2}\right)^2 \left(\sum_{k=0}^{3p-1} A^{2k^2}\right)^2}{3p^2}.$$

Théorème H. Soient r un nombre premier impair et M une sphère d'homologie rationnelle de dimension trois. Si M est r -périodique alors pour tout entier $p \geq 4$ premier avec $3r$ on a:

$$\mathcal{I}_p(M) \equiv (\mathcal{I}_p(\overline{M}))^r (G_p(A))^\alpha, \text{ modulo } r, [3]^r - [3],$$

où α est un entier.

La congruence donnée par ce théorème prend lieu dans $\Lambda_p[\frac{1}{3p}]$. Pour montrer que la condition donnée par le théorème H n'est pas triviale, nous écrivons la congruence proposée par ce théorème dans le cas des revêtements branchés au-dessus de la sphère de dimension trois. Dans ce cas la formule en question devient simple et plus explicite.

Corollaire H. Soient r un nombre premier impair et M le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 . Alors pour tout $p \geq 4$ tel que $r \equiv \pm 1 \pmod{p}$, il existe un entier α tel que :

$$\mathcal{I}_p(M) \equiv (G_p(A))^\alpha \pmod{r}.$$

Applications.

On peut voir d'après la définition que le calcul de l'invariant \mathcal{I}_p n'est pas facile même pour les variétés les plus simples. Dans la suite nous illustrons la condition obtenue dans le corollaire H1 en considérant l'espace lenticulaire $L(2, 1)$. Remarquons qu'on a $G_5(A) = A^{-36}$ et que $\Phi_{15}(A) = 1 - A + A^3 - A^4 + A^5 - A^7 + A^8$. Par conséquent, pour montrer que l'espace lenticulaire $L(2, 1)$ n'est pas le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 il suffit de montrer que $\mathcal{I}_5(L(2, 1))$ n'est une puissance de A dans $\Lambda_5[\frac{1}{15}]$. En écrivant la formule générale obtenue dans [43] dans le cas particulier $p = 5$, on obtient:

$$\mathcal{I}_5(L(2, 1)) = 1 - A - A^2 + A^3 - A^4 + A^5 - A^7.$$

Les puissances de A dans l'anneau $\Lambda_5[\frac{1}{15}]$ sont données par la liste suivante:

$$\begin{aligned} &1, A, A^2, A^3, A^4, A^5, A^6, A^7, \\ &-1 + A - A^3 + A^4 - A^5 + A^7, \\ &A^2 - A^6 - 1 - A^3 + A^7, \\ &-1 - A^5, -A - A^6, -A^2 - A^7, \\ &1 - A - A^4 + A^5 - A^7, \\ &1 - A^2 + A^3 - A^4 + A^6 - A^7. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{I}_5(L(2, 1))$ n'est pas une puissance de A . Par conséquent, $L(2, 1)$ n'est pas le revêtement cyclique régulier à r feuillets ramifié au-dessus de S^3 , pour tout r congru à 1 ou -1 modulo 5. En faisant des calculs similaires pour d'autres valeurs de p , nous pouvons avoir d'autres précisions sur les symétries des espaces lenticulaires.

Il est à signaler que les techniques que nous utilisons pour établir les conditions de congruences pour les invariants $SU(2)$ et $SU(3)$ permettent d'obtenir des résultats similaires pour l'invariant de Murakami-Ohtsuki-Okada [44] qui est en un certain sens l'invariant quantique le plus simple. En effet, on peut construire une théorie skein très simple qui permet de définir cet invariant qu'on note Z_N . La congruence qu'on obtient est donnée par la formule suivante:

Théorème I. Soient r un nombre premier impair et M une sphère d'homologie rationnelle de dimension trois. Si M est r -périodique alors pour tout entier impair $N \geq 2$ premier avec r on a:

$$Z_N(M) \equiv \pm (Z_N(\overline{M}))^r, \text{ modulo } r$$

où α est un entier.

Received: December 2002 . Revised: April 2003.

References

- [1] J. W. Alexander. *Topological invariants of knots and links*. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 30, pp. 275-306, 1928.
- [2] H. Bass, J. Morgan. *The Smith conjecture*. Academic Press, 1984.
- [3] J. K. Bartoszynska. and J. Przytycki. *3-Manifold invariants and periodicity of homology spheres*. Preprint.
- [4] C. Blanchet *Hecke algebras, modular categories and 3-manifolds quantum invariants*. Topology 39 (2000), no. 1, pp. 193-223.

- [5] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum and P. Vogel. *Three-Manifold invariants derived from the Kauffman bracket*. Topology, 31 (1992), 685-699.
- [6] W. Burau. *Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 11 pp. 179-186, 1936.
- [7] G. Burde, H. Zieschang. *Knots*. De Gruyter, 1985.
- [8] G. Burde. *Über periodische knoten*. Arkiv der math. (Basel) 30, pp. 487-492, 1978.
- [9] N. Chbili. *On the invariants of lens knots*. Proceedings of knots 96. World Scientific Publishing Co, pp. 365-375, 1997.
- [10] N. Chbili. *Le polynôme de HOMFLY des nœuds librement périodiques*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, pp. 411-414, 1997.
- [11] N. Chbili. *The Jones polynomials of freely periodic knots*, J. Knot Th. Ram. Vol 9, No 7 (2000), pp. 885-891.
- [12] N. Chbili. *The skein polynomial of freely periodic knots*, Topology and its Appl. 121 (2002) pp. 535-542
- [13] N. Chbili. *The quantum $Su(3)$ invariants of links and Murasugi's congruence*. Topology and its Appl. 122 (2002) pp. 479-485
- [14] N. Chbili. *Les invariants θ_p des 3-variétés périodiques*. Annales de l'institut Fourier, Fascicule 4, pp. 1135-1150 (2001).
- [15] N. Chbili. *The multi-variable Alexander polynomial of lens braids*, J. Knot Th. Ram. Vol 11, No 8 (2002) pp. 1323-1330
- [16] N. Chbili. *Quantum invariants and finite group actions on 3-manifolds*, Topology and its Appl. 136, pp. 219-231 (2004)
- [17] N. Chbili. *A new criterion for knots with free periods*, To appear in Ann. Fac. Sc. Toulouse.
- [18] J. H. Conway. *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*. Computational Problems in Abstract Algebra. Pergamon Press, New York, pp. 329-358, 1970.
- [19] J. F. Davis, C. Livingston. *Alexander polynomials of periodic knots*. Topology, 30, pp. 551-564, 1991.
- [20] E. Flapan. *Infinitely periodic knots*. Canad. J. Math. 37, pp. 17-28, 1985.
- [21] N. P. Gilmer. *Quantum invariants of periodic three-manifolds*. Geometry and Topology monographs, Vol. 2: proceeding of the Kirbyfest, pp. 157-175 (1999).

- [22] D. L. Goldsmith. *Symmetric fibered links*. Knots, groups and 3-manifolds, Princeton University press 1975.
- [23] R. Hartely. *Knots with free period*, Can. J. Math., Vol XXXIII, No. 1, pp. 91-102, 1981.
- [24] J. A. Hillman. *New proofs of two theorems on periodic knots*. Arkiv der math. (Basel) 37, pp. 457-461, 1981.
- [25] J. A. Hillman. *Symmetries of knots and links, and invariants of abelian coverings (part 1)*. Kobe J. Math. 3, pp. 7-27, 1986.
- [26] J. A. Hillman. *Symmetries of knots and links, and invariants of abelian coverings (part 2)*. Kobe J. Math. 4, pp.149-165, 1986.
- [27] V. F. R. Jones. *A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 12, No. 1, pp. 103-111, 1985.
- [28] V. F. R. Jones. *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*. Annals of Mathematics, Vol. 126, pp. 335-388, 1987.
- [29] L. H. Kauffman. *An invariant of regular isotopy*. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 318, pp. 417-471, 1990.
- [30] S. Kinoshita. *On knots and periodic transformations*. Osaka Math. J. 10, pp. 43-52, 1952.
- [31] G. Kuperberg. *The quantum G_2 link invariant*, Interna. J. Math. 5 pp. 61-85 (1994).
- [32] T. Kanenobu, Y. Miyazawa. *The second and third terms of the HOMFLY polynomial of a link*. Kobe J. Math., 16 pp. 147-159, 1999.
- [33] S. Y. Lee and C. Y. Park. *Braid representation of periodic links*. Bull Austral. Math. Soc. 55 pp. 7-18, 1997.
- [34] W.B.R. Lickorish, K. C. Millet. *A polynomial invariant of oriented links*. Topology, vol. 26, pp. 107-141, 1987.
- [35] W. B. R. Lickorish. *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*. Ann. Math. 76 (1962), 531-540.
- [36] W. B. R. Lickorish. *The skein method for 3-manifold invariants*. J. Knot Th. Ram. 2 (1993), 171-194.
- [37] C. Livingston. *Knot theory*. Math. Ass. Ame. 1993.
- [38] A. A. Markov. *Über die freie äquivalenz geschlossener zöpfe*. Math. Sb., vol. 1, pp. 73-78, 1935.

- [39] H. R. Morton. *The multi-variable Alexander polynomial for a closed braid*. Contemporary Mathematics. 233 pp. 167-172, 1999.
- [40] K. Murasugi. *On periodic knots*. Comment. Math. Helv. 46, pp. 162-174, 1971.
- [41] K. Murasugi. *The Jones polynomials of periodic links*. Pacific J. Math. 131 pp. 319-329, 1988.
- [42] J. Milnor. *Singular points and complex hypersurfaces*. Ann. Math. studies, Princeton University Press. 1968.
- [43] H. Miyazawa and M. Okamoto. *Quantum $SU(3)$ Invariants derived from the linear skein theory*. Proceeding of Knots 96, Ed. S. Suzuki. WSPC 1997 pp.299-308.
- [44] H. Murakami T. Ohtsuki. and M. Okada. *Invariants of three-manifolds derived from linking matrices of framed links*, Osaka Journal of Math. 29, (1992), pp. 545-572.
- [45] T. Ohtsuki and S. Yamada. *Quantum $SU(3)$ Invariants via linear skein theory*. J. Knot Theory Rami. 6, (1997), pp 373-404.
- [46] J. H. Przytycki. *On Murasugi and Traczyk criteria for periodic links*. Math. Ann. 283 pp 465-478, 1989.
- [47] J. H. Przytycki. *Vassiliev-Gusarov skein modules of 3 manifolds and criteria for knot's periodicity*. preprint, december 1992.
- [48] J. Przytycki and A. Sikora. *$SU(N)$ invariants of periodic links*. Preprint.
- [49] J. Przytycki and M. Sokolov. *Surgeries on periodic links and homology of periodic 3-manifolds* Math. Proc. Cambridge Phi. Soc., 131, Part 2 (to appear).
- [50] K. Reidemeister. *Knotentheorie*. Chelsea, New York 1948.
- [51] N. YU. Reshitikhin and V. Turaev. *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*. Invent. Math. 103, (1991), 547-597.
- [52] D. Rolfsen. *Knots and Links*. Mathematics Lecture Series, Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, 1990.
- [53] J. H. Rubinstein. *An algorithm to recognize the 3-sphere*. Proc. Int. Con. Math. Zürich, pp. 601-611. 1994.
- [54] M. Sakuma. *Non free periodicity of amphicheiral hyperbolic knots*. Homotopy theory and related topics, Adv. stu. in Math. 9. 1986.
- [55] P. Traczyk. *A criterion for knots of period 3*. Topology appl, 36, pp. 275-281, 1990.

- [56] P. Traczyk. *Periodic knots and the skein polynomial*. Invent. Math, 106(1), pp. 73-84, 1991.
- [57] P. Traczyk. *10_{101} has no period 7: A criterion for periodicity of links*. Proc. Amer. Math. Soc. 108, pp. 845-846. 1990.
- [58] Y. Yokota. *The skein polynomial of periodic knots*. Math. Ann. 291, pp. 281-291, 1991.
- [59] Y. Yokota. *The Kauffman polynomial of periodic knots*. Topology, vol. 32, pp. 309-324, 1993.
- [60] Y. Yokota. *Skeins and quantum $SU(N)$ invariants of 3-manifolds*. Math. Ann. 307 (1997), 109-138.
- [61] E. Witten. *Quantum field theory and the Jones polynomial*. Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351-399.